Problem 1 []

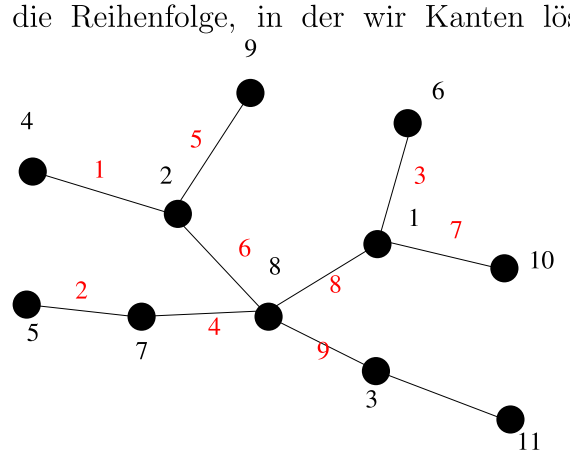
(a) We show that $L(G)$ is connected and all its degrees are positive even numbers. Let e, f be two distinct edges of G. Let x be an endpoint of e and y be an endpoint of f. If G is eulerian, then G is connected and there is a path P from x to y in G. The edges of P form a path in $L(G)$. Moreover, they are adjacent to e and f, thus, $L(G)$ is connected.

Next observe that for any edge $h = ab \in E(G)$, $\deg(a) \geq 2$ and $\deg(b) \geq 2$ is even, thus, $(N(a)_G \cup N_G(b)) \setminus \{a, b\}$ is even and therefore, $N_{L(G)}(ab)$ has positive even degree in $L(G)$. We have $L(G)$ is connected with all degrees even, therefore, by Euler's theorem, $L(G)$ is eulerian.

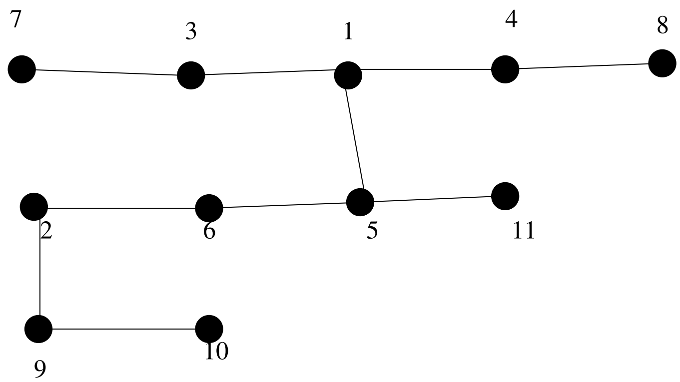
(b) Let G be a hamiltonian graph with n vertices and let $C = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ be a hamiltonian cycle of G. The edges $e_i = v_i v_{i+1}$, $i \in [n-1]$, and $v_n v_1$ form a cycle $C' = L(C)$ in $L(G)$. Let E be the edges of G not in C. For each edge e from E we assign the label between 1 and $n-1$, which is the smallest index such that e is incident with v_i. Starting with C' we obtain a Hamilton cycle in $L(G)$ as follows. We start with a vertex $e_1 = v_1 v_2$ in $L(G)$ and whenether there are vertices $e \in E$ with label 1 we include all of them into the cycle (in any order). Further, we proceed with the vertex $e_2 = v_2 v_3$ again including after it all edges with the label 2 and so on. Since every edge $e \in E$ has label in $[n-1]$. We will have included all the edges from G while traversing the cycle $L(C)$. Thus, $L(G)$ is hamiltonian.

Problem 2 []

(a) Der Prüfercode lautet $(2, 7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 3)$, die roten Zahlen markieren die Reihenfolge, in der wir Kanten löschen, um den Baum zu erhalten.



(b) Der Baum sieht wie folgt aus:



Problem 3 []

Wir zählen Paare (e, T), wobei $e \in E(K_n)$ und T ein aufspannender Baum in K_n ist. Es gilt, dass jede Kante in der gleichen Anzahl b der Bäume liegt, und da jeder aufspannender Baum genau $n-1$ Kanten enthält, folgt:

$$\binom{n}{2} b = (n-1)n^{n-2},$$

also liegt jede Kante in genau $2n^{n-3}$ Bäumen. Somit enthält der Graph $K_n - e$ genau $n^{n-2} - 2n^{n-3}$ Bäume.

Problem 4 []

Sei E_n die Menge aller Graphen auf der Knotenmenge $[n]$, deren alle Knoten einen geraden Grad haben. Und sei $\mathcal{G}_n$ die Menge aller Graphen auf der Knotenmenge $[n]$. Wir zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{E}_n \to \mathcal{G}_{n-1}, f(G) := G - n$ eine Bijektion ist. Dazu definieren wir eine weitere Funktion wie folgt: $g : \mathcal{G}_{n-1} \to E_n, g(G) := ([n], E(G)\dot\cup\{vn \colon \deg_G(v) \notin 2\mathbb{N}\})$. Die Funktion g ist wohldefiniert, denn die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad in einem Graphen ist immer gerade. Es ist offensichtlich, dass $g(f(G)) = G$ für alle $G \in E_n$ und $f(g(G)) = G$ für alle $G \in \mathcal{G}_{n-1}$. Also $g = f^{-1}$ und

$$|E_n| = |\mathcal{G}_{n-1}| = 2^{\binom{n-1}{2}}.$$

Problem 5 []

$\mathcal{A}(\mathbf{r}) : R_r(3) > 2^r$

Induktionsanfang: Für $r = 1$ gilt $R_1(3) = 3 > 2^1$.

$\mathcal{A}(\mathbf{r}) \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{r+1})$: Wir partitionieren die Knotenmenge des $K_{2^{r+1}}$ in zwei disjunkte Teilmengen A und B jede der Größe 2^r. Nach der Induktionsvoraussetzung, $\mathcal{A}(\mathbf{r})$, gibt es Färbungen mit den Farben $1, \ldots, r$ von $\binom{A}{2}$ und $\binom{B}{2}$ ohne monochromatisches Dreieck. Nun kann man die Kanten $e \in \binom{A\dot\cup B}{2} \setminus \left(\binom{A}{2}\dot\cup\binom{B}{2}\right)$ mit der Farbe $r+1$ färben. Die Kanten in der Farbe $r+1$ bilden einen bipartiten Graphen (dreiecksfrei!) mit den Klassen A und B, und die Kanten in jeder der Farben $1, \ldots, r$ bilden ebenso einen dreiecksfreien Graphen (nach $\mathcal{A}(\mathbf{r})$), also haben wir eine $r+1$-Färbung des $E(K_{2^{r+1}})$ ohne monochromatische Dreiecke gefunden und somit gilt:

$$R_{r+1}(3) > 2^{r+1}.$$

Problem 6 []

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $2k$ Ecken ungeraden Gerades. Diese bezeichnen wir mit $\{v_1, \ldots, v_{2k}\}$. Wir fügen G die k Ecken $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ hinzu und verbinden jeweils die Ecke u_k mit den beiden Ecken v_{2k-1} und v_{2k}. Den so entstandenen Graph bezeichnen wir mit $\tilde{G} = (V \dot{\cup} U, E \dot{\cup} \tilde{E})$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\tilde{G}$ eulersch ist, da alle Ecken geraden Grad haben (die u_i haben Grad 2, die v_i haben jeweils eine Kante dazu bekommen und die übrigen Ecken sind unverändert geblieben). Sei also T eine Eulertour in $\tilde{G}$. Wir stellen fest, dass die Kantenpaare des Typs $v_{2i-1}u_i$,u_iv_{2i} jeweils direkt hintereinander in der Eulertour auftauchen müssen (da die u_i Grad 2 haben). Das Entfernen aller dieser Kantenpaare zerteilt T in genau k trails $T_1, \ldots, T_k$, die alle Kanten aus $E(G)$ beinhalten.

(b) Es gibt keine Graphen mit ungerader Anzahl Ecken ungeraden Grades.

Problem 7 []

Im folgenden nehmen wir an, dass die Grade in der Gradsequenz immer in absteigender Reihenfolge sortiert sind.

$\Longrightarrow$ Sei B ein ein Baum mit den Knotengraden $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$. Da ein Baum mit n Knoten genau $n-1$ Kanten enthält, gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E(B)| = 2n - 2.$$

$\Longleftarrow$ Wir führen die Induktion nach n:

$\mathcal{A}(\mathbf{n})$: Für $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, mit $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$, gibt es einen Baum mit den Knotengraden $d_1, \ldots, d_n$.

Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $d_1 = d_2 = 1$ und somit $B = K_2$.

$\mathcal{A}(\mathbf{n}) \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{n+1})$: Seien $d_1, \ldots, d_{n+1} \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, mit $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2n$. Der Durchschnitt aller d_is ist $d = 2 - \frac{2}{n+1} \in (1, 2)$, also müssen $d_{n+1} = 1$ und ein $d_1 \geq 2$ sein. Dann definieren wir eine neue Sequenz natürlicher Zahlen wie folgt:

$$\tilde{d}_1 = d_1 - 1 \text{ und } \tilde{d}_2 = d_2 \ldots, \tilde{d}_n = d_n$$

Ferner gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i = \sum_{i=2}^{n} d_i + \tilde{d}_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i - 1 = 2n - 2.$$

Nach $\mathcal{A}(\mathbf{n})$ gibt es einen Baum B_n mit der Gradsequenz $(\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_n)$. Wir erhalten einen Baum B_{n+1} auf $n+1$ Knoten, indem wir an den ersten Knoten mit dem Grad $\tilde{d}_1$ ein Blatt anhängen. Der Baum B_{n+1} hat die Gradsequenz $(d_1, \ldots, d_{n+1})$. Und somit folgt $\mathcal{A}(\mathbf{n+1})$.

Problem 8 []

Sei $e = xy \in E(T) \setminus E(T')$. Wir wissen, dass $T' + e$ einen Kreis C enthält. Sei $P := C - e$ der Weg in T', der die Enden x und y der Kante e verbindet. Da $T - e$ genau zwei Komponenten enthält, folgt dass es in P eine Kante geben muss, deren Enden in zwei verschiedenen Komponenten von $T - e$ liegen. Sei diese Kante e'. Es folgt $T - e + e'$ ein aufspannender Baum ist, da er zusammenhängend und $n - 1$ Kanten enthält. Weiter ist $T' - e' + e$ ein aufspanennder Baum, da er $n - 1$ Kanten enthält und azyklisch ist.

Problem 9 []

Angenommen, G hat zwei minimal aufspannende Bäume. Seien diese T_1 und T_2 und die Gewichtsfunktion $w : E(G) \to \mathbb{R}$. Sei $e \in E(T_1) \cup E(T_2) \setminus (E(T_1) \cap E(T_2))$ die Kante mit dem größten Gewicht (diese Kante ist eindeutig, da alle Gewichte paarweise verschieden sind). Ohne Einschränkung sei $e \in E(T_1)$. Nach der Aufgabe 4 wissen wir, dass es eine Kante $e' \in E(T_2) \setminus E(T_1)$ gibt mit $T_1 + e' - e$ ein aufspannender Baum. Da wir angenommenhaben, dass $w(e) > w(e')$ gilt, folgt, dass

$$w(T_1 + e' - e) = w(T_1) - w(e) + w(e') < w(T_1),$$

und das ist Widerspruch zur Annahme, dass T_1 ein minimal aufspannender Baum ist.

Problem 10 []

We show the statement by induction on k. Indeed, we can classify walks of length k from v_i to v_j according to the penultimate vertex. Thus, if $a'_{i,j}$ is the number of walks of length k from v_i to v_j and $a''_{s,t}$ is the number of walks of length $k - 1$ from v_s to v_t. Then, clearly:

$$a'_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} a''_{i,s} a_{s,j},$$

and, by the induction hypothesis, $a''_{i,s}$ is the entry (i, j) of A_G^{k-1}, implying:

$$a'_{i,j} = (A_G^k)_{i,j}.$$