

DOZENT: PROF. DR. TIBOR SZABÓ,  
ÜBUNGSLEITER: DR. YURY PERSON, WILHELM NEUBERT

## Übungsblatt 1

Abzugeben bis zum 19. April, am Ende der Vorlesung

### Aufgabe 1

[10 Punkte]

- (a) Wie viele  $n \times n$  Matrizen mit Einträgen aus  $\{0, 1, \dots, q - 1\}$  gibt es?
- (b) Sei  $q$  eine Primzahl. Wie viele nicht singuläre Matrizen gibt es über dem Körper mit  $q$  Elementen? (Anders ausgedrückt: Wie viele der Matrizen aus Aufgabenteil (a) haben eine Determinante, die nicht durch  $q$  teilbar ist?)

### Aufgabe 2

[10 Punkte]

Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  genau dann eine ungerade Anzahl von Teilern (einschließlich 1 und  $n$  selbst) hat, wenn  $\sqrt{n}$  eine ganze Zahl ist.

### Aufgabe 3

[10 Punkte]

Gegeben sei ein Schachbrett  $B$  der Größe  $2^n \times 2^n$ , aus dem ein beliebiges Feld ausgeschnitten wird, und außerdem ein Dominostein  $L$  (eckförmig), der genau die Felder  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$  des Schachbrettes überdecken kann. Zeigen Sie, dass  $B$  vollständig mit nicht überlappenden Kopien von  $L$  bedeckt werden kann, die jeweils drei Felder bedecken.

### Aufgabe 4

[10 Punkte]

gestrichen

### Aufgabe 5

[10 Punkte]

gestrichen

### Aufgabe 6

[10 Punkte]

Auf einer Insel leben 33 sehr intelligente und hungrige Löwen. Eines Tages fällt ein saftiges Steak vom Himmel, durchtränkt mit einem sehr starken Schlafmittel. Jeder Löwe auf der Insel weiß über die Existenz anderer Löwen auf der Insel und auch, dass es gefährlich ist, das Steak zu fressen. Sollte einer der Löwen das Steak fressen, schläft er sofort für einen gewissen Zeitraum ein und kann von einem anderen Löwen gefressen werden. Allerdings ist das Schlafmittel so stark dosiert, dass der Löwe, der den Löwen auffrisst, der das Steak aufgefressen hat, auch sofort nach dem Aufessen

in den Schlaf fällt usw. Mit anderen Worten, das Schlafmittel verliert seine Wirkung nicht, wenn es durch die Mägen vieler Löwen wandert.

Jeder Löwe muss also entscheiden, ob er das Steak fressen soll, um seinen Hunger zu stillen, oder ob er lieber davon lassen sollte, um selbst nicht zum “Steak” für andere Löwen zu werden. Wir nehmen ferner an, dass die Löwen ihre Beute nicht teilen, und so das Steak oder einen anderen Löwen komplett auffressen würden. Alle Löwen werden von zwei Instinkten geleitet:

1. der erste ist, zu leben,
2. der zweite ist, seinen Hunger zu stillen,

wobei der erste am stärksten bei allen ausgeprägt ist.

Was werden die Löwen auf der Insel tun? Werden sie versuchen, das Steak zu finden und zu fressen oder lieber hungrig bleiben?

### **Aufgabe 7**

[10 Punkte]

- (a) Gegeben sei ein konvexes  $n$ -gon mit der Eigenschaft, dass, wenn wir alle Diagonalen einzeichnen, es keine drei Diagonalen gibt, die sich im gleichen Punkt schneiden. Wie viele Diagonaleschnittpunkte gibt es?
- (b) Wie viele ganze Zahlen gibt es in der Menge  $[99999]$ , in der die Ziffern in strikt aufsteigender Reihenfolge vorkommen?