Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Diskrete Mathematik 1

Dozent: Prof. Dr. Tibor Szabó,
Übungsleiter: Dr. Yury Person, Wilhelm Neubert

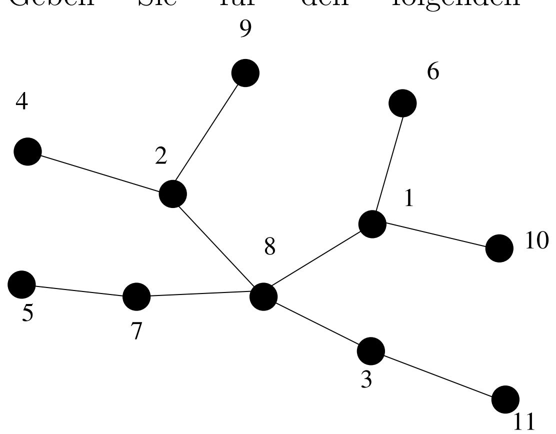
SommerSemester 2011
21. Juni 2011

Übungsblatt 11

Abzugeben bis zum 28. Juni, am Ende der Vorlesung

Aufgabe 1 [10 Punkte]

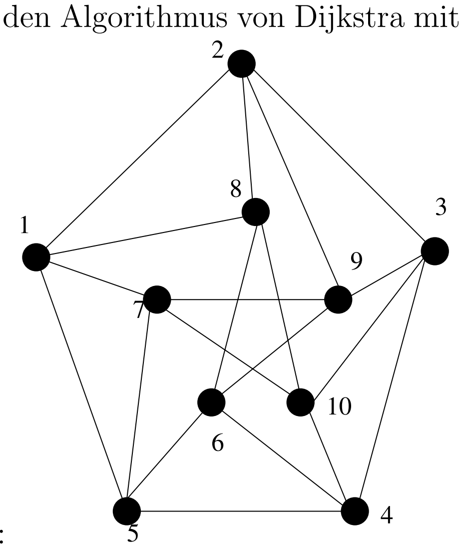
(a) Geben Sie für den folgenden Baum seinen Prüfer-Code an.



(b) Geben Sie den aufspannenden Baum für den Prüfer-Code $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5)$ an.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Wenden Sie den Algorithmus von Dijkstra mit dem Startknoten 1 auf den folgenden Graphen an:



Dabei definieren wir Gewichte von der Kante ij als $w(i,j) = |i - j|$.

Aufgabe 3 [10 Punkte]
Zeigen Sie, dass falls alle Kantengewichte in einem zusammenhängenden Graphen G paarweise verschieden sind, so hat G einen eindeutigen minimal aufspannenden Baum.

Aufgabe 4 [10 Punkte]
Seien T und T' zwei aufspannende Bäume eines zusammenhängenden Graphen G. Beweisen Sie, dass für jedes $e \in E(T) \setminus E(T')$ es eine Kante $e' \in E(T') \setminus E(T)$ gibt, so dass beide Graphen $T' + e - e'$ und $T - e + e'$ aufspannende Bäume sind.

Anmerkung 1. *Diese Aufgabe verbindet zwei Sätze aus der Vorlesung.*

Aufgabe 5 [10 Punkte]
Wie viele aufspannende Bäume hat der Graph $K_n - e$? ($K_n - e$ ist der vollständige Graph minus eine beliebige Kante.)

Aufgabe 6 [10 Punkte]
Für einen Graphen G definiere den Graphen G^j wie folgt:

$$G^j = (V(G), \{uv\colon\ \mathbf{dist_G(v,u) \leq j}\}),$$

wobei $\mathbf{dist_G(u,v)}$ die Länge des kürzesten Wegs in G ist, der u und v verbindet. Der Graph G heißt Hamiltonsch, falls er einen Kreis mit $|V(G)|$ Knoten enthält.
Sei T ein Baum mit n Knoten. Zeigen Sie, dass T^3 Hamiltonsch ist, d.h. einen Kreis C_n enthält.