Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Diskrete Mathematik 1

Dozent: Prof. Dr. Tibor Szabó,
Übungsleiter: Dr. Yury Person, Wilhelm Neubert

SommerSemester 2011
26. April 2011

Übungsblatt 3

Abzugeben bis zum 3. Mai, am Ende der Vorlesung

Aufgabe 1 [10 Punkte]

- Zeigen Sie, dass für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n},$$

wobei für gerades n die beiden mittleren Koeffizienten zusammenfallen.

- Zeigen Sie ein analoges Resultat für die Stirling Zahlen erster Art. Zu jedem $n \geq 1$ gibt es ein $M(n)$, so dass gilt: $s_{n,0} < s_{n,1} < \ldots < s_{n,M(n)} > s_{n,M(n)+1} > \ldots > s_{n,n}$ oder $s_{n,0} < s_{n,1} < \ldots < s_{n,M(n)-1} = s_{n,M(n)} > \ldots > s_{n,n}$, wobei $M(n) = M(n-1)$ oder $M(n) = M(n-1)+1$ ist. Hinweis: Verwende die Rekursionen für $s_{n,k}$ und schließe mit Induktion.

Anmerkung 1. *Dasselbe Resultat gilt auch für $S_{n,k}$.*

Aufgabe 2 [10 Punkte]
Die Bellzahl B_n ist die Anzahl aller Mengen-Partitionen einer n-elementigen Menge, also $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$, wobei $S_{n,k}$ die Stirling Zahlen zweiter Art sind und $B_0 := 1$. Zeigen Sie:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Aufgabe 3 [10 Punkte]
Beweisen Sie die folgende überraschende Formel über Bellzahlen:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!}$$

In den folgenden zwei Aufgaben wollen wir ununterscheidbare Pennies auf ununterscheidbare Geldbeutel so verteilen, dass jeder Geldbeutel **mindestens einen Penny bekommt**.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Möglichkeiten n Pennies auf die Geldbeutel so zu verteilen, dass keiner mehr als k Pennies bekommt, gleich der Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten auf höchstens k Geldbeutel ist.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Möglichkeiten, n Pennies aufzuteilen, so dass jeder Geldbeutel eine ungerade Anzahl Pennies enthält, gleich der Anzahl ist, diese n Pennies so zu verteilen, dass jeder Geldbeutel eine unterschiedliche Anzahl Pennies bekommt.