Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Diskrete Mathematik 1

SommerSemester 2011
10. Mai 2011

Dozent: Prof. Dr. Tibor Szabó,
Übungsleiter: Dr. Yury Person, Wilhelm Neubert

Übungsblatt 5

Abzugeben bis zum 17. Mai, am Ende der Vorlesung

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $i \leq n$ und ein $d \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $|i\alpha - d| < 1/n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\{\alpha n\} : n \in \mathbb{N}\}$ der fraktionellen Teile der Vielfachen von α dicht im Intervall $[0, 1]$ genau dann ist, wenn α irrational ist. (Der fraktionelle Teil von β ist wie folgt definiert: $\{\beta\} := \beta - \lfloor \beta \rfloor$. Eine Menge $A \subseteq B$ ist dicht in B wenn es für jeden Punkt $b \in B$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ gibt so dass $|a - b| < \varepsilon$.)

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Ein Kind bekommt eine Schachtel mit 45 Pralinen. Es ißt mindestens eine Praline jeden Tag im April. Zeigen Sie, dass es eine Periode (aufeinanderfolgende Tage) gibt, in der es *genau* 14 Pralinen ißt.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Zeigen Sie: in einer Sequenz von mehr als srp reellen Zahlen gibt es entweder eine strikt monoton steigende Folge der Länge größer als s oder eine strikt monoton fallende Folge der Länge größer als r oder eine konstante Sequenz der Länge größer als p.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Zwei gleich große Schallplatten, die erste ist transparent und die zweite nicht, sind jeweils in 200 gleich große Kreissektoren unterteilt. Dann färbt man beliebige 100 Kreissektoren der ersten Schallplatte gelb und die verbleibenden blau. Danach werden die Sektoren der transparenten Platte beliebig mit gelb und blau gefärbt, und die transparente Platte wird auf die andere so gelegt, dass sich die Kreissektoren genau übereinander befinden.

Zeigen Sie, dass Sie die transparente Schallplatte auf der anderen so platzieren können, dass mindestens 100 Sektoren grün erscheinen (der Kreissektor kommt einem grün vor, wenn sich der gelbe Sektor der transparenten Schallplatte über dem blauen Sektor der anderen Platte befindet oder anders herum).

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Sei $R_r(3)$ die Verallgemeinerung der Ramseyzahl $R(3,3)$ auf r viele Farben.

(a) Schreiben Sie die Definition von $R_r(3)$ auf.

(b) Zeigen Sie, dass $R_r(3)$ endlich ist.
Hinweis: Beweisen Sie, dass $R_r(3) \leq r(R_{r-1}(3) - 1) + 2$ gilt.

(c) Beweisen Sie die folgende obere Schranke:

$$R_r(3) \leq \lfloor e \cdot r! \rfloor + 1.$$

Hinweis: Wir wissen, dass $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ gilt.

Aufgabe 6 [10 Punkte]

Konstruieren Sie für jedes k einen Graphen G, der belegt: $R(k,k) > (k-1)^2$.