

DOZENT: PROF. DR. TIBOR SZABÓ,  
ÜBUNGSLEITER: DR. YURY PERSON, WILHELM NEUBERT

## Übungsblatt 6

Abzugeben bis zum 24. Mai, am Ende der Vorlesung

### Aufgabe 1 [10 Punkte]

Verallgemeinern Sie den Beweis der unteren Schranke für  $R(k, k)$  aus der Vorlesung für drei Farben und zeigen Sie:

$$R(k, k, k) > \frac{k}{3e} \sqrt{3}^k.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie  $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$ .

### Aufgabe 2 [10 Punkte]

Seien  $F_0, F_1, F_2, \dots$  die Fibonacci-Zahlen ( $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  für  $n \geq 0$ ). Stellen Sie durch Auswerten von jedem der folgenden Ausdrücke für kleine Werte von  $n$  eine Vermutung für eine allgemeine Formel auf und beweisen Sie sie per Induktion.

(a)  $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}$ .

(b)  $F_0 + F_2 + \dots + F_{2n}$ .

### Aufgabe 3 [10 Punkte]

In einem Land werden Münzen mit Werten von 1 Peso, 2 Pesos, 5 Pesos und 10 Pesos sowie die Geldscheine mit den Werten von 5 Pesos, 10 Pesos, 20 Pesos, 50 Pesos und 100 Pesos benutzt. Stellen Sie eine Rekursion für die Anzahl der Möglichkeiten auf, eine Rechnung von  $n$  Pesos zu begleichen, wobei die Reihenfolge der Münzen und der Geldscheine eine Rolle spielt.

### Aufgabe 4 [10 Punkte]

(a) Finden Sie eine Rekursion für die Anzahl der Möglichkeiten, einen Fußgängerweg mit den Platten auszulegen (der Weg ist genau eine Platte breit). Die Platten sind entweder rot, grau oder grün und es ist nicht erlaubt zwei rote Platten nebeneinander zu legen. Ferner sind die Platten derselben Farbe ununterscheidbar.

(b) Was sind die Anfangsbedingungen für die Rekursion in (a)?

- (c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Weg mit 20 Platten zu pflastern? Wie sieht die allgemeine Formel aus?

**Aufgabe 5**

[10 Punkte]

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

**Aufgabe 6**

[10 Punkte]

Finden Sie erzeugende Funktionen für die nachstehenden Folgen (mit Begründung; bitte geben Sie sie in geschlossener Form an, nicht als unendliche Reihen!):

- (a)  $0, 0, 0, 0, 6, 6, 6, 6, 6, \dots$
- (b)  $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$
- (c)  $1, 2, 1, 4, 1, 8, \dots$
- (d)  $1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$