Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Diskrete Mathematik 1

SommerSemester 2011
24. Mai 2011

Dozent: Prof. Dr. Tibor Szabó,
Übungsleiter: Dr. Yury Person, Wilhelm Neubert

Übungsblatt 7 (wird nicht korrigiert)

Besprechung in der Zentralübung (14-16Uhr) am 1.06 in Arnimallee 7, SR Erdgeschoss 31

Aufgabe 1 [10 Punkte]
Sei a_n die Anzahl geordneter r-Tupel $(i_1, \ldots, i_r)$ nicht negativer ganzer Zahlen mit $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n$; hier ist r eine feste natürliche Zahl.

(a) Finden Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

(b) Finden Sie eine Formel für a_n.

Aufgabe 2 [10 Punkte]
Zeigen Sie:

(a) Man kann jede natürliche Zahl als Summe paarweise verschiedener Fibonacci-Zahlen schreiben.

(b) Man kann jede natürliche Zahl als Summe von nicht aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen schreiben.

(c) Beweisen Sie, dass die Darstellung in (b) eindeutig ist, und geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Darstellung aus (a) nicht eindeutig sein muss.

Aufgabe 3 [10 Punkte]
Man bezeichne die Menge der Folgen $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$, die der Gleichung

$$y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y_{n+i} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

genügen mit dem Symbol $\mathcal{Y}$. Sei $p(x) = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$ das charakteristische Polynom der homogenen linearen Rekusion (1). Und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen mit $k_1 + \ldots + k_q = k$, so dass

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} (x - \lambda_2)^{k_2} \ldots (x - \lambda_q)^{k_q}.$$

Zeigen Sie Folgendes:

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{Y}$ ein Vektorraum ist (Folgen werden gliedweise addiert und gliedweise mit komplexen Zahlen multipliziert).

(b) Zeigen Sie, dass die Dimension von $\mathcal{Y}$ gleich k ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede der Folgen $(\binom{n}{j}\lambda_i^n)_{n=0}^{\infty}$ (für alle $i \in [q]$ und $j \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$) zur Lösungsmenge $\mathcal{Y}$ gehört.

(d) Beweisen Sie, dass die in (c) betrachteten Fogen in $\mathcal{Y}$ linear unabhängig sind, d.h. eine Basis bilden.

Schliessen Sie, dass dann für jede Folge $y = (y_0, y_1, \ldots) \in \mathcal{Y}$, die Gleichung (1) genügt, komplexe Zahlen C_{ij} ($i = 1, 2, \ldots q$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$) existieren, so dass für alle n gilt:

$$y_n = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{k_i-1} C_{ij} \binom{n}{j} \lambda_i^n.$$

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Was ist die Anzahl der Triangulierungen eines konvexen n-gons, dessen Ecken durch Zahlen 1, 2, …, n markiert sind? Eine Triangulierung eines konvexen n-gons entspricht den sich nicht schneidenden Diagonalen, so dass jede Fläche ein Dreieck ist.