Wartezeiten

Wie lang müssen warten?

Viele Beispielen im täglichen Leben:

Warten auf ein Rot in Roulette
ein 6er in Lotto
nächsten Regen
nächste U-bahn
Telefon bei unseren Freund nicht mehr besetzt
nächste Schadenfall

Character des Wartens kann ganz unterschiedlich sein:

Wartezeit kann
- diskret sein (Anzahl der Roulette Runde des Lotto-Ziehens)

oder

- kontinuierlich sein (Zeit bis nächste Regen/U-bahn/Anruf)

- beschränckt sein (zuverlässige Handwerker)

oder

- unbeschränkt sein (erste Rot in Roulett, erste Schadenfall)

Die Wartezeit, in der W-keit, kann mit der Zeit
- verkürzt werden (Lebensdauer einer Glühbirne)
- verlängert werden (Fang eines entflohenen Gefangenen)
- unverändert sein (nächste Anruf in Call-Center)

"gedächtnislos"

WARTEZEITEN

Eine Wartezeit kann durch eine ZV beschrieben werden, die nicht negativ ist.

Wir warten auf ein bestimmtes Ereignis "EVENT" zu geschehen. Der Wert der ZV $T_{EVENT} : \Omega \to (0,\infty)$ ist der Zeitpunkt wenn "EVENT" geschieht.

Idee einer gedächtnis lose Wartezeit:

Die W-keit, dass "EVENT" nicht im nächsten Zeitintervall der Länge s auftritt, ist unabhängig davon, wieviel wir bisher ereignislos gewartet haben.

Mathematisch ausgedrückt:

Def: $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum (kontinuierlich)
Ein ZV $T : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ heißt gedächtnislose Wartezeit wenn $\forall s,t \geq 0$

$$\mathbb{P}(T > s) = \mathbb{P}(T > s+t \mid T > t)$$

W-keit dass wir mehr als Zeit s warten müssen

Jetz es ist Zeitpunkt t. Bis jetzt nichts passiert.

W-keit, dass wir mehr als s weitere Zeit warten müssen.

Def: $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum. Ein ZV $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt (diskrete) gedächtnislose Wartezeit wenn

$$\forall s,t \in \mathbb{N}_0 \quad \mathbb{P}(T > s) = \mathbb{P}(T > s+t \mid T > t)$$

Bemerkungen:

(1) Nehmen wir an dass $\mathbb{P}(T > t) \neq 0$.

Dann $\mathbb{P}(T > s+t \mid T > t) = \dfrac{\mathbb{P}(T > s+t)}{\mathbb{P}(T > t)}$

weil $\{T > s+t\} \cap \{T > t\} = \{T > s+t\}$

So $\boxed{\mathbb{P}(T > s) = \mathbb{P}(T > s+t \mid T > t) \iff \mathbb{P}(T > s) \cdot \mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(T > s+t)}$

Insbesondere, durch Induktion, $\boxed{\mathbb{P}(T > n \cdot s) = \mathbb{P}(T > s)^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall s \geq 0$

$\left(\underline{\text{Bew}}: \mathbb{P}(T > \underbrace{n \cdot s}_{s + (n-1)s}) = \mathbb{P}(T > s) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(T > (n-1)s)}_{\text{Induktion: } \mathbb{P}(T > s)^{n-1}} = \underline{\underline{\mathbb{P}(T > s)^n}} \right)$

(2) In Definitionen sprechen über bedingte W-keit, aber nicht über die W-keit der Bedingung $\{T > t\}$.

$T \neq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(T > 0) = 1 \Rightarrow \exists t_0 > 0 \quad \mathbb{P}(T > t_0) > 0$

(weil für diskrete $\mathbb{P}(T \geq 1) = \mathbb{P}(T > 0) = 1$
für kontinuierlich $1 = \mathbb{P}(T > 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T > \tfrac{1}{n}\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(T > \tfrac{1}{n})$ durch Stetigkeit nach oben)

$\Rightarrow \forall t > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad t_0 N > t$ und dann
$\mathbb{P}(T > t) \geq \mathbb{P}(T > t_0 N) = \mathbb{P}(T > t_0)^N > 0$

$\Rightarrow \boxed{\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(T > t) \neq 0}$

Diskreter Fall: Gedächtnislos Eigenschaft ist ganz klar für die ZV, die die erste 1-Koordinate darstellt (wegen der Unabhängigkeit der Projektionen vom Produktraum)

$$Z(\omega) = \min\{i : \omega_i = 1\}$$

$$\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\quad Z \quad} \mathbb{N} \ni Z(\omega)$$

$$\underbrace{\{0\}\times\{0\}\times\dots\times\{0\}}_{t}\times\underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\dots}_{(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\ \mathcal{P}(\{0,1\})^{\otimes\mathbb{N}},\ (\mathrm{ber}_p)^{\otimes\mathbb{N}})}$$

Was hier passiert, ist unabhängig von dem, was in den ersten t Koordinaten passiert ist.

Da das induzierte W-Maß die geometrische Verteilung ist, ist eine Richtung des folgenden Satzes nicht überraschend.

Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $Z : \Omega \to \mathbb{N}$ eine ZV.

Z ist eine gedächtnislose Wartezeit $\iff$ Z geometrisch verteilt

Beweis:

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei Z geometrisch verteilt zum Parameter q ($0 \le q < 1$), d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(Z = n) = q^{n-1}(1-q)$$

Dann $\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Z = j) = \sum_{j=n+1}^{\infty} q^{j-1}(1-q) \overset{k=j-(n+1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+n}(1-q)$

$$= (1-q)\, q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q)\, q^n \frac{1}{1-q} = q^n$$

Also $\forall s,t \in \mathbb{N}$ gilt: $\underline{\mathbb{P}(Z > s+t)} = q^{s+t} = q^s \cdot q^t = \underline{\mathbb{P}(Z > s)\cdot\mathbb{P}(Z > t)}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $q := \mathbb{P}(Z > 1)$.

$\mathbb{P}(Z > s) = \mathbb{P}(Z > s \cdot 1) = \mathbb{P}(Z > 1)^s = q^s$

• $q \neq 1$, weil $0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}\{Z > s\}\right) = \lim_{s\to\infty}\mathbb{P}(Z > s) = \lim_{s\to\infty} q^s$

• $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1-q)$ ✓ $\Rightarrow$ geometrisch

Das kontinuierliche Analogon der geometrische Verteilung ist die Exponentialverteilung.

Satz: Sei $Z : \Omega \to (0,\infty)$ eine ZV auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\boxed{Z \text{ ist eine gedächtnislose Wartezeit} \Leftrightarrow Z \text{ ist exponenzialverteilt}}$

Beweis: Erinnerung: Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$

Verteilungsfunktion: $1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0$

Dichtefunktion: $\lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei Z exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$

$$\underline{\mathbb{P}(Z > s+t)} = 1 - F_Z(s+t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda t} = (1 - F_Z(s)) \cdot (1 - F_Z(t))$$

$$= \underline{\mathbb{P}(Z > s) \cdot \mathbb{P}(Z > t)}$$

$\forall s, t \geq 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ (für Spezialfall wenn die Verteilungsfunktion F_Z stetig ist)

Sei $\lambda := -\ln(G(1))$ wobei $G(x) := 1 - F_Z(x) = \mathbb{P}(Z > x)$

Denn: (1) $G(0) = \mathbb{P}(Z > 0) = 1$

(2) $G(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

(3) $G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \quad \forall t, s \geq 0$

gedächtnislosigkeit

• λ ist wohl-definiert, da

$$\sqrt[n]{G(1)} \overset{(3)}{=} G\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} G(0) \overset{(1)}{=} 1$$

Stetigkeit von $G = 1 - F_Z$

$\Rightarrow G(1) \neq 0 \Rightarrow \lambda$ ist wohl-def.

$\lambda > 0$, weil $G(1) = 1 \Rightarrow 1 = G(1)^n = G(n) \xrightarrow[n \to \infty]{(2)} 0$ $\lightning$

Behauptung: $G(t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$

Beweis: $\forall m \in \mathbb{N} \quad G(m) \overset{(3)}{=} G(1)^m = e^{\ln(G(1)) \cdot m} = e^{-\lambda m}$

$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \left(G\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n \overset{(3)}{=} G(m) \Longrightarrow \underline{G\left(\frac{m}{n}\right) = G(m)^{\frac{1}{n}} = e^{-\lambda \frac{m}{n}}}$

$\Rightarrow$ Funktionen $e^{-\lambda x}$ und $G(x)$ stimmen auf $\mathbb{Q}_+$ überein.

$\Rightarrow$ wegen Stetigkeit von $G(x) = 1 - F_Z(x)$ und $e^{-\lambda x}$ auf $[0, \infty)$

$G(t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow F_Z(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow Z$ exp verteilt

Beispiel: In einen Call-Center kommen die Anrufe zwischen 9 und 10 einen Montagmorgen im Durchschnitt jede 10 Sekunden. Es ist jetzt 9:30, Sie sind allein da, aber Sie möchten rausgehen um eine Zigarette zu haben und es dauert 2 Minuten. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie das schaffen, ohne einen Anruf zu verpassen?

Lösung: Wir modelliere die Wartezeit auf die nächste Anruf durch ein Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$

Sei $T :=$ Zeit bis den erste Anruf in Sekunden

T exponentialverteilt zum Parameter λ.

$$10 = \mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(\text{Es gibt keiner Anruf für 2 Min}) = \mathbb{P}(T > 120) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(T \leq 120) = 1 - F_T(120) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 120})$$

$$= e^{-12} \approx 0{,}0000061\ldots$$ Nicht sehr wahrscheinlich

Wie viele freie Sekunden haben Sie zu rauchen, wenn Sie nicht wollen, einen Anruf mit mehr als 50% W-keit verpassen?

Lösung: Sie möchten ein x finden, so dass

$$0{,}5 \geq \mathbb{P}(\text{Es gibt ein Anruf in höchstens } x \text{ Sekunden}) = \mathbb{P}(T \leq x) =$$

$$= F_T(x) = e^{-\frac{1}{10}x} \quad \Longrightarrow \quad 0{,}5 \geq e^{-\frac{1}{10}x}$$

ln ist monotone steigend

$$\ln 0{,}5 \geq -\frac{x}{10}$$

$$6{,}9 \approx -10 \ln 0{,}5 \leq x$$

Ungefähr 6,9 Sek

Kombination gedächtnisloser Wartezeiten

Summen

Beispielen: • Wartezeit in Wartezimmer des Hausarztes mit Patienten vor uns, mit Behandlungszeiten $T_1, \dots, T_6$.
Unsere Wartezeit: $T_1 + \dots + T_6$

- Wir haben 5 Glühbirne mit Lebensdauer $L_1, \dots, L_5$
  Wie lang müssen wir keine neue kaufen? $L_1 + \dots + L_5$

- In Call-Center von dem Beispiel der letzten Seite haben Sie jetzt einen Kollegen, der während ihres Rauchens einen Anruf antworten kann. Sie interessieren sich dafür, ob $T_1 + T_2$ größer als 120 Sekunden ist oder nicht, wobei T_1 ist die Wartezeit auf die erste Anruf und T_2 ist -"- auf die zweite Anruf nach der erste

In dem letzen Beispiel die ZV sind • exponenzial verteilt
• unabhängig (gedächtnislosigkeit)

Satz: $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum
$T_1, \dots, T_n : \Omega \to [0, \infty)$ unabhängige, exponentialverteilt Wartezeiten zum Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

(i) Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so hat $\mathbb{P}_{T_1+T_2}$ die Dichtefunktion

$$h(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 x} - e^{-\lambda_1 x}\right) \quad \forall x \geq 0$$

(ii) Gilt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n =: \lambda$, so hat $\mathbb{P}_{T_1 + \dots + T_n}$ die Dichtefunktion

$$h_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0$$

Die Dichtefunktion h von $P_{T_1+T_2}$ ist die Faltung der Dichtefunktionen $f_1(x)$ (von P_{T_1}) und $f_2(x)$ (von P_{T_2}) (wegen der Unabhängigkeit von T_1 und T_2)

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \cdot f_2(x-y)\, dy =$$

da $f_2(x-y)=0$ für $\forall y > x$

da $f_1(y)=0$ für $\forall y<0$

$$= \int_0^x f_1(y) \cdot f_2(x-y)\, dy =$$

$$= \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (x-y)}\, dy =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \int_0^x \underbrace{e^{-\lambda_1 y} \cdot e^{\lambda_2 y}}_{e^{-(\lambda_1-\lambda_2)y}}\, dy =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \left[\frac{e^{-(\lambda_1-\lambda_2)y}}{-(\lambda_1-\lambda_2)} \Bigg|_0^x \right]$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \left[\frac{e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}}{-(\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{\overset{1}{\overbrace{e^{-(\lambda_1-\lambda_2)\cdot 0}}}}{-(\lambda_1-\lambda_2)} \right]$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x} \right]$$

(ii) Die Dichte von T_i ist $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \forall i \in [n]$

Induktion nach n.

$\boxed{n = 1}$ $\quad h_1(x) = \frac{\lambda^1}{(1-1)!} x^{1-1} e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} = f(x)$ ✓

$\boxed{n > 1}$ Die Dichte von $\mathbb{P}_{T_1 + \ldots + T_n}$ ist die Faltung der Dichte von $\mathbb{P}_{T_1 + \ldots + T_{n-1}}$ und der Dichte von $\mathbb{P}_{T_n}$ (weil $T_1 + \ldots + T_{n-1}$ und T_n unabhängig sind)

$$h_n(x) = (h_{n-1} * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{n-1}(y) \cdot h_1(x-y)\, dy =$$

(weil $h_1(x-y) = 0$ für $x<y$)

(weil $h_{n-1}(y) = 0$ für $y<0$)

$$= \int_0^x h_{n-1}(y) \cdot h_1(x-y)\, dy =$$

$$= \int_0^x \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-\lambda y} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-y)}\, dy$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \int_0^x y^{n-2}\, dy =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \left[\frac{y^{n-1}}{n-1} \Big|_0^x \right] =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{0^{n-1}}{n-1} \right] =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}}}$$

□

Beispiel 3: Wegen gedächtnislosigkeit der zweite Anruf kommt in Zeit ein exponentiel verteilt T_2 zum Parameter $\lambda = \frac{1}{10}$ und ist unabhängig von T_1.

$\Rightarrow$ Dichte von $\mathbb{P}_{T_1+T_2}$ ist $\frac{\lambda^2}{(2-1)!} x^{2-1} e^{-\lambda x} = \frac{x}{100} e^{-\frac{x}{10}}$

$$\mathbb{P}(T_1+T_2 \leq 120) = \int_0^{120} \frac{x}{100} e^{-\frac{x}{10}} dx = \frac{x}{100} \cdot e^{-\frac{x}{10}} \cdot (-10) \Big|_0^{120} - \int_0^{120} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{10}} (-10) dx$$

$$= -\frac{x \cdot e^{-\frac{x}{10}}}{10} \Big|_0^{120} + \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} (-10) \Big|_0^{120} =$$

$$= e^{-\frac{x}{10}} \left(-1 - \frac{x}{10}\right) \Big|_0^{120} =$$

$$= e^{-12}(-13) - (-1) = 1 - \frac{13}{e^{12}}$$

$\frac{13}{e^{12}} \approx 0{,}00008\ldots$ (13-times größer als ohne Kollege)

$$0{,}5 \geq \mathbb{P}(T_1+T_2 \leq x) = \int_0^x \frac{y}{100} e^{-\frac{y}{10}} dy =$$

$$= e^{-\frac{y}{10}} \left(-1 - \frac{y}{10}\right) \Big|_0^x = e^{-\frac{x}{10}} \left(-1 - \frac{x}{10}\right) + 1$$

$\Leftrightarrow \frac{x}{10} + 1 \geq \frac{1}{2} e^{\frac{x}{10}} \Leftrightarrow x + 10 \geq 5 \cdot e^{\frac{x}{10}}$

$x \leq 16{,}78$

16,78 Zeit (statt 6,79) für $\leq 50\%$ Anruf verpassen

Maxima: • Drei Freunde vorbereiten auf eine Klausur mit Vorbereitungszeit T_1, T_2, und T_3. Wann fühlen alle drei bereit für die Klausur? $\max\{T_1, T_2, T_3\}$

• T_1 und T_2 sind die Lebensdauer der zwei Glühbirne im Keller. Wie lang haben wir Beleuchtung im Keller? $\max\{T_1, T_2\}$

Satz: $T_1, \dots, T_n : \Omega \to [0, \infty)$ · unabhängig · exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

auf W-Raum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dann $\mathbb{P}_{\max\{T_1, \dots, T_n\}}$ hat die Dichtefunktion

$$\boxed{h(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x} \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} \left(1 - e^{-\lambda_j x}\right)}$$

Insbesondere für $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$, $h(x) = n \lambda e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1}$

Beweis: Verteilungsfunktionen für T_i: $F_{T_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_i x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$$F_{\max\{T_1, \dots, T_n\}}(x) = \mathbb{P}\left(\max\{T_1, \dots, T_n\} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i \leq x\}\right)$$

$$\overset{\text{Unabhängigkeit}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i \leq x) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_{T_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda_i x}\right)$$

$$h(x) = F'_{\max\{T_1, \dots, T_n\}}(x) = \left[\prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda_i x}\right)\right]'$$

Minimum:

- Gerät mit n Teilen, Lebensdauer der Teilen sind $T_1, \dots, T_n$. Lebensdauern des Geräts $\min\{T_1, \dots, T_n\}$
- Parkplatz mit 101 Autos und keine leeren Plätze. Die Wartezeit bis die i^{te} Auto weggeht ist T_i. Ich kann in Zeit $\min\{T_1, \dots, T_{101}\}$ parken.
- Call-Center einer Versicherungsfirma: Zwei verschiedene Typ von Versicherungen
  Anrufe für Autodiebstahl: Zeit T_1
  Anruf für Krankenversicherung: Zeit T_2
  Wie lang dauert es bis den ersten Anruf: $\min\{T_1, T_2\}$

Satz $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ W-Raum

$T_1, \dots, T_n : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$. unabhängig exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

Dann $T = \min\{T_1, \dots, T_n\}$ ist auch exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$

(Insbesondere, wenn $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$, dann zum Parameter $\frac{1}{n\lambda}$

Beweis: Verteilungsfunktion von $T = \min\{T_1, \dots, T_n\}$

$$F_T(x) = 1 - \mathbb{P}(\min\{T_1, \dots, T_n\} > x) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i > x\}\right)$$

$$\overset{\text{Unabhängigkeit}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > x) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{T_i}(x)) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = \underbrace{1 - e^{-(\sum \lambda_i) x}}_{\text{Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung zum Parameter } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$