Bedingte W-keit

Black Jack: Sie ziehen Karten eins nach dem anderen von einem gemischten Deck von 6mal 52 = 312 Karten. Wenn ich die verschiedene Karte zähle, und z.B. nach 121 Karten weiß ich, dass es noch 14 Königs gibt, aber nur 9 2s, dann weiß ich, dass die W-keit, dass die nächste Karte König ist viel größer als die W-keit dass es 2 ist. Dann kann ich diese Information zu meinen Vorteil nutzen und meine Gewinnchance deutlich erhöhen. (Films: "Rain Man", "21", ...)

Urne mit R rot und B blau Kugel

2 ziehen, ohne Zurücklegen, Ergebnis: mit Reihenfolge

$$\Omega = [R+B]^{\underline{2}} := \{(x,y) : 1 \le x, y \le R+B,\ x \ne y\}$$

$A = \{(x,y) \in \Omega : 1 \le x \le R\}$ "Erste Kugel ist rot."

$B = \{(x,y) \in \Omega : 1 \le y \le R\}$ "Zweite Kugel ist rot."

Bevor Experiment: $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{R(R+B-1)}{(R+B)(R+B-1)} = \frac{R}{R+B}$

Anzahl mögliche zweite Koordinate (muß ROT sein!)

Anzahl mögliche erste Koordinate NACH die zweite ausgewählt ist.

- Nehmen wir jetzt an, dass wir wissen, dass die erste Kugel rot ist. Was ist dann die W-keit von B? Die gleiche?

NEIN: $R-1$ ⟶ Anzahl "günstige" zweite Koordinate (erste rot ist nicht möglich)

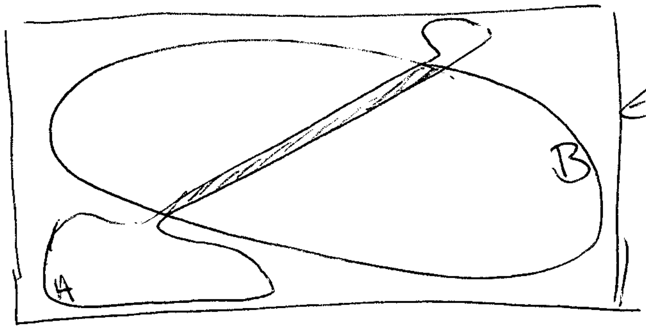
$R+B-1$ ⟶ Anzahl alle mögliche

$$\boxed{\frac{R-1}{R+B-1} < \frac{R}{R+B}}$$ "Information verändert W-keit"

Def: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum, $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, wobei $\boxed{\mathbb{P}(B) > 0}$.

Die <u>bedingte W-keit</u> <u>von A</u> <u>unter Bedingung B</u> ist

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$



Ω

$\mathbb{P}(A)$ larger als $\mathbb{P}(A \mid B)$

<u>Beispiel</u>: "Augensumme von 2 Würfel"

$\Omega = [6]^2 \qquad \mathbb{P}$ = Gleichverteilung auf Ω.

$A =$ "Summe ist ≥ 10" $= \{(x,y) \in \Omega : x + y \geq 10\}$
$= \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Für $i \in [6]$
$B_i =$ "erste Würfel ist NICHT i" $= \{(x,y) \in \Omega : x \neq i\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_i) = \frac{5 \cdot 6}{36} = \frac{5}{6}$$

- $i = 3 \rightsquigarrow B_3 \cap A = A \Rightarrow \mathbb{P}(A \mid B_3) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

  Das Auftreten von B_3 macht A wahrscheinlicher

- $i = 4 \rightsquigarrow \mathbb{P}(A \mid B_4) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_4)} = \frac{|\{(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}|}{5 \cdot 6} = \frac{5}{5 \cdot 6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

  Das Auftreten von B_4 ändert die W-keit von A <u>NICHT</u>

- $i = 5 \rightsquigarrow \mathbb{P}(A \mid B_5) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_5)}{\mathbb{P}(B_5)} = \frac{|\{(4,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}|}{5 \cdot 6} = \frac{4}{5 \cdot 6} < \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

Mehr Beispiele:

- $\mathbb{P}(B_3 | A) = \frac{\mathbb{P}(B_3 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

  ⇝ "Wenn A auftritt, dann tritt auch B_3 auf"

Im Allgemeinen: Wenn $\boxed{E \subseteq F \subseteq \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(F|E) = 1}$

- $\mathbb{P}(B_4 | A) = \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{5/36}{6/36} = \frac{5}{6} = \mathbb{P}(B_4)$

  Das Auftreten von A ändert die W-keit von B_4 NICHT.

Def: Zwei Ereignissen $E, F \subseteq \Omega$ in einem diskreten W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ heißen unabhängig wenn

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$$

B_4 und A sind unabhängig.

Behauptung: $E, F \subseteq \Omega$, $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$

E und F unabhängig $\Leftrightarrow \mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E) \Leftrightarrow \mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(F)$

- $\mathbb{P}(B_4 \cup B_5 \cup B_6 | A) = \frac{\mathbb{P}((B_4 \cup B_5 \cup B_6) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(A)} = \underline{\underline{0}}$

  Im Allgemeinen: Wenn $\boxed{E \cap F = \emptyset, \text{ dann gilt: } \mathbb{P}(E|F) = 0}$

  "Wenn F passiert, dann E ausgeschlossen ist."

Bemerkungen:
- $\emptyset$ und Ω sind unabhängig von $\forall E \subseteq \Omega$
- Wenn $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$ und $E \cap F = \emptyset$, dann E und F sind NICHT unabhängig. (Das Auftreten von einem verringert die W-keit des andere zu Null.)

Satz von der totalen W-keit: (W-keitsrechnen durch Fallunterscheidung)

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter W-Raum, I höchstens abzählbar Menge

Sei $B_i \subseteq \Omega$ $\forall i \in I$ so dass • $\mathbb{P}(B_i) > 0$ $\forall i \in I$

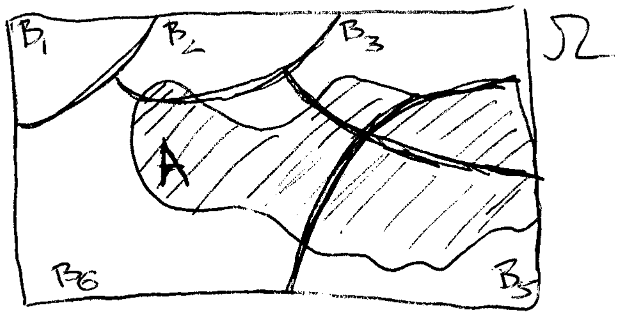
$(B_i)_{i \in I}$ ist eine Partition von Ω $\begin{cases} \bullet\ B_i \cap B_j = \emptyset & \forall i \neq j,\ i,j \in I \\ \bullet\ \bigcup_{i \in I} B_i = \Omega \end{cases}$

Dann gilt: $\forall A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

Beweis:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup B_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)\right) \overset{\text{weil } I \text{ höchstens abzählbar ist}}{=} \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)$$



Bemerkung: Der Satz ist die Summenregel der W-theorie.
Wenn die Berechnung der W-keit eines Ereignis A schwierig ist:
Klassifizieren wir die Elemente von Ω in $B_1, \ldots, B_n$,
so dass zusammen mit Bedingung B_i die W-keit von A
ist einfacher zu rechnen. ("Divide et impera")

$\mathbb{P}(B_{i_0} | A)$ durch die $\mathbb{P}(A | B_i)$ berechnen:

Satz von Bayes:

Es seien Ω, $\mathbb{P}$, I, $(B_i)_{i \in I}$ wie im Satz von TW.

Dann für $\forall$ Ereignis $A \subseteq \Omega$ $\boxed{\text{mit } \mathbb{P}(A) > 0}$ und $\forall$ Index $i_0 \in I$

gilt:
$$\mathbb{P}(B_{i_0} | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_{i_0}) \cdot \mathbb{P}(B_{i_0})}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

Beweis:

$$\mathbb{P}(B_{i_0} | A) = \frac{\mathbb{P}(B_{i_0} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \underset{\text{Satz der TW}}{=} \frac{\overbrace{\mathbb{P}(B_{i_0} \cap A)}^{= \mathbb{P}(A | B_{i_0}) \cdot \mathbb{P}(B_{i_0})}}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

$\square$

Beispiel aus der Medizin

Es gibt eine Krankheit K

Es gibt ein Test T, um herauszufinden ob eine Person K hat.

Wir wissen: 0.3% der Bevölkerung hat K

Güteeigenschaften des Tests:

- Sensitivität des Tests: 99%
  (Mit welcher W-keit wird eine kranke Person als krank erkennt?)
- Spezifität des Tests: 98%
  (Mit welcher W-keit wird eine gesunde Person als "gesund" klassifiziert?)

Dies scheint ein sehr effektiver Test.

Sagen wir ich bekomme ein positives Testergebnis ("Krankheit")

Wie wahrscheinlich ist es, daß ich wirklich krank bin?

Ω = Bevölkerung Laplaceraum

$B \subseteq \Omega$: kranke Personen

$A \subseteq \Omega$: Testpositive Personen

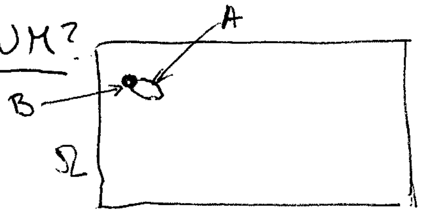
- $\mathbb{P}(B) = 0{,}003$
- $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}99$
- $\mathbb{P}(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0{,}98$

Bayes mit $B_1 = B$ und $B_2 = \Omega \setminus B$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}003}{0{,}99 \cdot 0{,}003 + 0{,}02 \cdot 0{,}997}$$

$$\approx 0{,}129 \quad \text{NUR!}$$

WARUM?



Das Türenparadox

Marilyn vos Savant (1990)

Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door there is a car, behind the others, goats. You pick a door, say #1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say #3, which has a goat. He says to you, "Do you rather want to pick door #2? Is it to your advantage to switch your choice of doo

Antwort von Savant: "Yes, you should switch. The first door has a $\frac{1}{3}$ chance of winning, but the second door has a $2/3$ chance."

Böse Comments "You blew it! ... Let me explain. If one door is shown to be a loser, that information changes the probability of either remaining choice, neither of which has any reason to be more likely, to $1/2$. As a professional mathematician, I'm very concerned with the general public's lack of mathematical skills."

"You blew it, and you blew it big! --- There is enough mathematical illiteracy in this country, and we don't need the world's highest IQ propagating more, Shame!"

"Maybe women look at math problems differently than men

"You are the goat!"

Wahrscheinlichkeitsmodel

Türen: A: Auto, B: Ziege, C: Ziege

Spielers Wahl: S (gleichverteilt auf $\{A, B, C\}$)

Moderators Tür: M (allgemeine Regeln nicht explizit formulier

Situation: $\{M \neq S\} \cap \{M \neq A\} =: E$

Frage $\mathbb{P}(\{S = A\} \mid E) = ???$

- Welche Einschränkungen hat der Moderator bei Wahl von Tür M? Welche Einschränkungen kann der Spieler darüber denken? Hat er irgendwelche? Was kann der Spieler darüber denken?

(1) $\mathbb{P}(M \neq A) = 1$ (Moderator zeigt einfach das Auto nicht. Das wäre GAME OVER, kein Spaß.)

(2) $\mathbb{P}(M \neq S) = 1$ (Moderator öffnet Spielers Tür nicht. Jetzt es ist so. Und vielleicht ist es immer so?

$$(1) + (2) \Rightarrow \mathbb{P}(E) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\{S = A\} \mid E) = \mathbb{P}(\{S = A\}) \underset{\substack{\uparrow \\ S \text{ ist gleichverteilt}}}{=} \frac{1}{3}$$

Dies ist Savant's Antwort. (W-keit von Gewinn beim "SWITCH" ist $\frac{2}{3}$.

Was passiert wenn nur (1) ist ein Regel des Moderators und er öffnet jede der zwei Ziegetüren mit W-keit $\frac{1}{2}$? (D.h., er kann die Tür der Spieler auch öffnen.)

Öffnen die Spielerstür wenn die eine Ziege hat ist ein Vorteil des Spielers, richtig??! NEIN:

$$\mathbb{P}(\{S = A\} \mid E) = \mathbb{P}(\{S = A\} \mid \{M \neq S\}) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(\{M \neq S\} \mid \{S = A\}) \cdot \mathbb{P}(\{S = A\})}{\mathbb{P}(M \neq S \mid S = A) \cdot \mathbb{P}(S = A) + \mathbb{P}(M \neq S \mid S \neq A) \cdot \mathbb{P}(S}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$ Antwort des Kritikers!

Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

("Die Kombination von Informationen kann zu neuen Informationen führen")

Beispiel: Zwei Münzen werden geworfen.

Ereignissen: A: Die zwei Münze zeigen verschiedene Seiten

B_1: Die erste Münze zeigt Kopf

B_2: Die zweite Münze zeigt Zahl

Dann: A ist unabhängig von B_1 : $\underbrace{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B_1)}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \mathbb{P}(\underbrace{A\cap B_1}_{\{(\text{Kopf}, \text{Zahl})\}}) = \frac{1}{4}$

A ist unabhängig von B_2 =

B_1 ist unabhängig von B_2 : $\mathbb{P}(B_1)\cdot\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B_1\cap B_2)$

Aber B_1 und B_2 bestimmen A !

wenn die beide: B_1 UND B_2 auftreten $\Rightarrow$ auch A auftritt!

$B_1\cap B_2$ und A sind NICHT unabhängig weil $B_1\cap B_2 \subseteq A$

(so $\mathbb{P}(B_1\cap B_2\cap A) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(B_1\cap B_2)\mathbb{P}(A)$)

Also: Alle zwei der Ereignisse A, B_1, und B_2 sind unabhängig, aber irgendwie sind die "Menge" aller drei Ereignisse "zusammen" NICHT.

Def: $(\Omega, \mathbb{P})$: diskrete W-Raum

I: beliebige Indexmenge

Eine Menge $\{E_i : i\in I\}$ von Ereignissen $E_i\subseteq\Omega$ heißt unabhängig wenn für $\forall\, J\subseteq I, |J|<\infty$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in J} E_i\Big) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(E_i)$$

Verallgemeinerung: Unabhängigkeit von ZVen

Beispiel! Zufällig ausgewählte Person Q:

- X: Monatseinkommen von Q (in ganze €)
- Y: Größe der Wohnung von Q (in ganze m^2)
- Z: Tag der Monat der Geburtstag von Q

X, Y, Z sind alle diskrete ZV auf Ω = Menschen der Welt/Berlin

Wir glauben:

- Information über den Wert von X auch gibt Information über den Wert von Y.
- Information über den Wert von Z gibt kein Information über den Wert von Y.

Also: "Z und Y sind unabhängig", "X und Y sind nicht unabhängig"

Def: $(\Omega, \mathbb{P})$: diskrete W-Raum.

ZVe $Z: \Omega \to \Omega_1$ und $Y: \Omega \to \Omega_2$ heißen unabhängig wenn $\forall\, \omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$ die Ereignisse $\{Z = \omega_1\}$ und $\{Y = \omega_2\}$ sind unabhängig

(d.h. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = \omega_1, Y(\omega) = \omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = \omega_1\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = \omega_2\})$)

Beispiel: $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ $\quad \chi_{E_1}, \chi_{E_2} : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$

χ_{E_1} und χ_{E_2} sind unabhängig $\Leftrightarrow$ E_1 und E_2 sind unabhängig

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbb{P}(E_1)\cdot\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\chi_{E_1}=1)\cdot\mathbb{P}(\chi_{E_2}=1) \underset{\chi_{E_1} \text{ und } \chi_{E_2} \text{ unabhängig}}{=} \mathbb{P}(\{\chi_{E_1}=1\}\cap\{\chi_{E_2}=1\}) = \mathbb{P}(E_1\cap E_2)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}$

- $\omega_1=1, \omega_2=1$: $\mathbb{P}(\{\chi_{E_1}=1\}\cap\{\chi_{E_2}=1\}) = \mathbb{P}(E_1\cap E_2) = \mathbb{P}(E_1)\cdot\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\{\chi_{E_1}=1\})\cdot\mathbb{P}(\{\chi_{E_2}=1\})$
- $\omega_1=1, \omega_2=0$: $\mathbb{P}(\{E_1=1\}\cap\{\chi_{E_2}=0\}) = \mathbb{P}(E_1\cap \overline{E_2}) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1\cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$

  weil $E_1 = (E_1\cap \overline{E_2}) \uplus (E_1\cap E_2)$ ist eine Partition von E_1; $\quad$ E_1 und E_2 sind unabhängig

  $= \mathbb{P}(E_1)(1-\mathbb{P}(E_2)) = \mathbb{P}(E_1)\cdot\mathbb{P}(\overline{E_2}) = \mathbb{P}(\chi_{E_1}=1)\cdot\mathbb{P}(\chi_{E_2}=0)$
- ($\omega_1=0, \omega_2=1$ ist gleich)
- $(\omega_1=0, \omega_2=0)$ $\mathbb{P}(\{E_1=0\}\cap\{E_2=0\}) = \mathbb{P}(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}) = 1-\mathbb{P}(E_1)-\mathbb{P}(E_2)+\mathbb{P}(E_1\cap E_2) = 1-\mathbb{P}(E_1)-\mathbb{P}(E_2)+\mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$

  $= (1-\mathbb{P}(E_1))\cdot(1-\mathbb{P}(E_2))$

  $= \mathbb{P}(\overline{E_1})\cdot\mathbb{P}(\overline{E_2})$

  $= \mathbb{P}(\chi_{E_1}=0)\cdot\mathbb{P}(\chi_{E_2}=0)$

Def: (Unabhängigkeit von mehrere ZV)

$(\Omega, \mathbb{P})$: diskrete W-Raum

$I \neq \emptyset$: beliebige Indexmenge

$Y_i : \Omega \to \Omega_i$: ZV für $\forall i\in I$

Die Menge $\{Y_i : i\in I\}$ von ZVen heißt unabhängig wenn für beliebige Wahl von Elementarereignissen $\omega_i \in \Omega_i$ die Menge $\{\{Y_i=\omega_i\} : i\in I\}$ von Ereignissen unabhängig ist.

Bemerkung: Das heißt: $\forall$ jede endliche Teilmenge $J\subseteq I$ von Indizes und $\forall \omega_j \in \Omega_j$ (mit $j\in J$)

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J}\{Y_j=\omega_j\}\Big) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(Y_j=\omega_j)$$

Beispiel: $\boxed{\text{Produktmaß}}$

Def: $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ diskrete W-Räume

Definieren wir den Produktraum $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)$:

$$\forall (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega_1, \ldots, \omega_n) := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i(\omega_i)$$

Produktmaß

Check: $\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$ ist wirklich eines W-Maß auf $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$

$\left(\text{d.h. } \sum_{\omega \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = 1\right)$. Spezialfall des folgendes:

Lemma: $\forall J \subseteq [n]$, $\forall \alpha_j \in \Omega_j \quad (j \in J)$

$$\sum_{\omega \in C_1 \times \ldots \times C_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}_j(\alpha_j) \quad \text{wobei } C_j := \begin{cases} \{\alpha_j\} & \text{wenn } j \in J \\ \Omega_j & \text{wenn } j \notin J \end{cases}$$

Für $J = \emptyset$: $\sum_{\omega \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = \prod_{j \in \emptyset} \mathbb{P}_j(\alpha_j) = 1$

Leeres Produkt

Beweis des Lemmas:

$$\sum_{\omega \in C_1 \times \ldots \times C_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = \sum_{\omega_1 \in C_1} \cdots \sum_{\omega_n \in C_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega_1, \ldots, \omega_n) =$$

Def von $\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$

$$= \sum_{\omega_1 \in C_1} \cdots \sum_{\omega_n \in C_n} \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n(\omega_n) =$$

$$= \left(\sum_{\omega_1 \in C_1} \mathbb{P}_1(\omega_1)\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{\omega_n \in C_n} \mathbb{P}_n(\omega_n)\right) =$$

$$= \mathbb{P}_1(C_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n(C_n) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}_j(\alpha_j)$$

weil

$$\mathbb{P}_j(C_j) := \begin{cases} \mathbb{P}_j(\alpha_j) & j \in J \\ 1 & \text{wenn } j \notin J \end{cases}$$

Satz: Es seien $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$

$\mathbb{P} := \mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n$ und

$\mathrm{Proj}_i : \Omega \longrightarrow \Omega_i$ die Projektion auf die i^{te} Koordinate

(d.h., Proj_i ist die ZV die durch $\mathrm{Proj}_i(\omega) := \omega_i, \forall \omega \in \Omega$, definiert)

Dann gilt: (1) $\forall i \in [n]: \mathbb{P}_{\mathrm{Proj}_i} = \mathbb{P}_i$ (d.h. die Verteilung von ZV Proj_i ist genau $\mathbb{P}_i$)

(2) Die Menge $\{\mathrm{Proj}_1, \dots, \mathrm{Proj}_n\}$ von ZV ist unabhängig

Beweis: $\boxed{(1)}$ Es sei $\alpha_i \in \Omega_i$ beliebig (und $i \in [n]$ beliebig)

$$\underline{\underline{\mathbb{P}_{\mathrm{Proj}_i}(\alpha_i)}} := \mathbb{P}(\underbrace{\{\mathrm{Proj}_i = \alpha_i\}}_{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times \{\alpha_i\} \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n}) = \sum_{\omega} (\mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) \overset{\text{Lemma}}{=} \underline{\underline{\mathbb{P}_i(\alpha_i)}}$$

Def von der durch Proj_i induzierte W-Maß

$\boxed{(2)}$ Es seien $J \subseteq [n]$, $|J| < \infty$, beliebig und $\forall j \in J$, $\alpha_j \in \Omega_j$ beliebig.

$$\mathbb{P}(\underbrace{\bigcap_{j \in J} \{\mathrm{Proj}_j = \alpha_j\}}_{C_1 \times \dots \times C_n}) \overset{\text{Lemma}}{=} \prod_{j \in J} \mathbb{P}_j(\alpha_j) \overset{(1)}{=} \prod_{j \in J} \mathbb{P}_{\mathrm{Proj}_j}(\alpha_j) = \underline{\underline{\prod_{j \in J} \mathbb{P}(\{\mathrm{Proj}_j = \alpha_j\})}}$$

wobei $C_i := \begin{cases} \{\alpha_i\} & \text{wenn } i \in J \\ \Omega_i & \text{wenn } i \in [n] \setminus J \end{cases}$

$\Longrightarrow$ So $\{\mathrm{Proj}_1, \dots, \mathrm{Proj}_n\}$ ist unabhängig

Spezialfall: $\Omega_1 = \dots = \Omega_n = \Omega$ und $\mathbb{P}_1 = \dots = \mathbb{P}_n = \mathbb{P}$

$$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \Omega^n$$
$$\mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n = \mathbb{P}^{\otimes n}$$

Bem.: Model für n-mal "unabhängig" wiederholt Experimenten

Beispiel: $\Omega = \{0,1\}$ $\mathbb{P}: \Omega \to \{0,1\}$ ist das Bernoulli maß zum Parameter p.

Dann $(\Omega^n, \mathbb{P}^{\otimes n})$ ist der Produkraum wobei die Projektion sind unabhängige ZV mit Bernoulli verteilung:

Satz $\Rightarrow$ (1) $\forall j$ $\mathbb{P}_{\mathrm{Proj}_j} = \mathbb{P}_j = \mathbb{P}$ ist Bernoulli verteilung zum Parameter p.

(2) $\{\mathrm{Proj}_1, \dots, \mathrm{Proj}_n\}$ ist unabhängig.

Satz: (Binomialverteilung als die Summe von n unabhängige Bernoulliverteilungen.) Es seien $\Omega, \mathbb{P}$, und Proj_i wie oben.

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0,\ p \in [0,1]$ gilt: $\boxed{\mathbb{P}^{\otimes n}_{\mathrm{Proj}_1 + \dots + \mathrm{Proj}_n} = b_{n,p}}$

Beweis: sei $k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}^{\otimes n}_{\mathrm{Proj}_1+\dots+\mathrm{Proj}_n}(k) = \mathbb{P}^{\otimes n}(\mathrm{Proj}_1 + \dots + \mathrm{Proj}_n = k) =$$
$$= \mathbb{P}^{\otimes n}\Big(\underbrace{\{\omega \in \{0,1\}^n : \textstyle\sum_{i=1}^n \omega_i = k\}}_{= E_k}\Big) =$$
$$= \sum_{\omega \in E_k} \mathbb{P}^{\otimes n}(\omega) = \sum_{\omega \in E_k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$
$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = b_{n,p}(k) \quad \square$$

weil $\forall \omega \in E_k$
$\mathbb{P}^{\otimes n}(\omega) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\omega_i)$
$= p^k (1-p)^{n-k}$
weil genau k von ω_i sind $1 \rightsquigarrow$ genau k $\mathbb{P}(\omega_i) = p$

Anwendung: Erwartungswert von Binomialverteilung:

$n \in \mathbb{N}_0$ $p \in [0,1]$, Ω, $\mathbb{P}$ und $Proj_i$ wie oben.

$Proj_1 + \dots + Proj_n$ ist binomialverteilt (zum Parameter n, p)

$$\mathbb{E}(Proj_1 + \dots + Proj_n) \overset{\text{Linearität des EW.}}{=} \mathbb{E}(Proj_1) + \dots + \mathbb{E}(Proj_n)$$

$$\overset{\text{Satz (1) und } Proj_i = \mathbb{P} \text{ ist Bernoulli verteilt zum Parameter } p}{=} p + \dots + p = \underline{\underline{np}}$$

Alternativer Weg:

Erwartungswert der Binomialverteilung:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot b_{n,p}(k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} = n \cdot p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$= n \cdot p \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,p}(j)}_{=1} = \underline{\underline{n \cdot p}}$$

Satz: (Erwartungswert der Produkt von unabhängige ZV)

$Z, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV mit existierende Erwartungswerten $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Y)$

$\Rightarrow$ EW von $Z \cdot Y$ auch existiert

und $\mathbb{E}(Z \cdot Y) = \mathbb{E}(Z) \cdot \mathbb{E}(Y)$

Beweis: (1) Existenz

$$\sum_{e \in \mathrm{Im}(YZ)} |e|\, P(YZ = e) = \sum_{e \in \mathrm{Im}(YZ)} |e| \cdot \mathbb{P}\left(\bigcup_{c \in \mathrm{Im} Y \setminus \{0\}} \left(\{Y = c\} \cap \{Z = \tfrac{e}{c}\} \right) \right)$$

$$= \sum_{e \in \mathrm{Im}(YZ)} |e| \cdot \sum_{c \in \mathrm{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}\left(\{Y = c\} \cap \{Z = \tfrac{e}{c}\} \right) =$$

$$= \sum_{e \in \mathrm{Im}(YZ)} |e| \cdot \sum_{c \in \mathrm{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \cdot \mathbb{P}(Z = \tfrac{e}{c}) =$$

$$= \sum_{c \in \mathrm{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \sum_{e \in \mathrm{Im}(Y \cdot Z)} |e| \cdot \mathbb{P}(Z = \tfrac{e}{c})$$

$$= \sum_{c \in \mathrm{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \sum_{cd \in \mathrm{Im}(Y \cdot Z)} |cd| \cdot \mathbb{P}(Z = d)$$

$d = \frac{e}{c}$

$$= \sum_{c \in \mathrm{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \sum_{d \in \mathrm{Im}(Z)} |c||d|\, \mathbb{P}(Z = d)$$

absolute convergence

$$= \left(\sum_{c \in \mathrm{Im} Y} |c|\, \mathbb{P}(Y = c) \right) \cdot \left(\sum_{d \in \mathrm{Im}(Z)} |d| \cdot \mathbb{P}(Z = d) \right) = \mathbb{E}(|Y|) \cdot \mathbb{E}(|Z|) < \infty$$

(2.) Wiederholen die ganze Rechnung - OHNE Betrag

$$E(YZ) := \sum_{e \in \mathrm{Im}\,YZ} e\,\mathbb{P}(YZ = e) = \text{-----}$$

$$\text{-----} = \left(\sum_{c \in \mathrm{Im}\,Y} c\,\mathbb{P}(Y = c)\right) \cdot \left(\sum_{d \in \mathrm{Im}\,Z} d\,\mathbb{P}(Y = d)\right) = E(Y) \cdot E(Z)$$

$\square$