FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
STOCHASTIK 1 (LEHRAMTSBEZOGENE)

WINTER SEMESTER 2016/17
17. DEZEMEBER 2016

DOZENT: PROF. TIBOR SZABÓ,
TUTOREN: DENNIS CHEMNITZ, MICHAEL ROTHGANG

BONUS Übungsblatt

Alle Lösungen müssen vollständig und nachvollziehbar **BEGRÜNDET** werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden möchten, dann geben Sie es genau an.

Abzugeben bis zum 5. Januar, 16:00, in den Fächern der Tutoren

Aufgabe 1 [10 Punkte]
Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es dann eine Primzahl p, sodass $\mathbb{P}(\{p, p+1, p+2, \ldots\}) < \epsilon$.
(*Tipp:* Schreiben Sie die Negation der Behauptung und versuchen Sie eine geeignete Eigenschaft von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu verwenden, um einen Widerspruch zu erreichen.)

Aufgabe 2 [10 Punkte]
Es sei $\Omega = [0, 1]$, versehen mit der Dichtefunktion $(\alpha + 1)x^\alpha$ mit einer Zahl $\alpha > 0$.

(a) Ist das wirklich eine Dichtefunktion?

(b) Bestimmen Sie α so, dass $\mathbb{P}([0, 0.5]) = 0.01$ ist.

Aufgabe 3 [10 Punkte]
Finden Sie eine stetige Dichtefunktion f auf $[0, 6]$, sodass für den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum gilt:

$$\mathbb{P}([0, 2]) = 0.6,\ \mathbb{P}([1, 4]) = 0.5, \mathbb{P}([3, 5]) = 0.2.$$

Aufgabe 4 [10 Punkte + 10 Bonuspunkte]

(a) Beweisen Sie das für jedes Mengensystem $\mathcal{G}$ auf einer Menge Ω exisitiert ein eindeutiges Dynkinsystem $d(\mathcal{G})$ das $\mathcal{G}$ enthält, und jedes andere Dynkinsystem $\mathcal{D}'$ auf Ω, das $\mathcal{G}$ enthält, enthält auch $d(\mathcal{G})$.

Sei $(\Omega, \sigma(\mathcal{M}))$ ein Ereignisraum, wobei $\mathcal{M}$ ein schnitt-stabiles Mengensystem auf Ω sei. Seien $\mathbb{P}$ und $\tilde{\mathbb{P}} : \sigma(\mathcal{M}) \to [0, 1]$ W-Maßen sodass $\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{M}} \equiv \mathbb{P}|_{\mathcal{M}}$ (d.h. $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(A)$ für jede Menge $A \in \mathcal{M}$).

(b) Beweisen Sie das $\mathcal{D} := \{E \in \sigma(\mathcal{M}) : \mathbb{P}(E) = \tilde{\mathbb{P}}(E)\}$ ein Dynkinsystem ist.

(c) Beweisen Sie das $\mathcal{E}_1 := \{E \subseteq \Omega : E \cap M \in d(\mathcal{M})\ \forall M \in \mathcal{M}\}$ ein Dynkinsystem ist.

(d) Beweisen Sie das $\mathcal{E}_2 := \{E \subseteq \Omega : E \cap F \in d(\mathcal{M})\ \forall F \in d(\mathcal{M})\}$ ein Dynkinsystem ist.

(e) Beweisen Sie dass $\mathbb{P} \equiv \tilde{\mathbb{P}}$ (d.h. $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(A)$ für jede Menge $A \in \sigma(\mathcal{M})$).

Bonusaufgabe [10 Bonuspunkte]

Ein beliebige Anzahl (unendlich erlaubt) von Wichtel bekommen jeweils entweder eine gelbe oder eine blaue Mütze aufgesetzt. Jeder kann die Mützenfarben der anderen sehen, aber nicht die eigene. Nun sollen alle gleichzeitig raten, welche Mütze sie selbst auf haben. Vor dem Experiment können sie sich auf eine Strategie einigen. Während des Experiments ist jegliche Kommunikation verboten. Geben Sie eine Strategie an (und, natürlich, beweisen Sie ihre Korrektheit) für die Wichtel, so dass in jedem Fall (d.h. egal wie die Mützen verteilt werden) nur endlich viele eine falsche Antwort geben.
(*Tipp:* Die Konstruktion unserer "verrückten" Menge kann hilfreich sein.)