

Benchmark Beispiele (Szenarien mit Zufall)

Glücksspiele:

- ① Wir werfen ein Würfel, Was ist die Augenzahl?
- ② Wir spielen Lotto, Wie viele richtige Zahlen haben wir?
- ③ Wir spielen ROT im Roulette 100 mal, Wie viel mal gewinnen wir?
- ④ Wir spielen ROT im Roulette bis wir ~~zum~~ ^{zum ersten Mal} gewinnen, Wie lang müssen wir warten?

Auch ein paar Beispiele, die NICHT Glücksspiele sind:

- ⑤ Wir telefonieren unseren besten Freund ~~an~~. Es ist besetzt, Wie lang müssen wir warten, bis er auflegt?
- ⑥ Wir ~~im~~ besitzen eine Versicherungsfirma. Wie viele Schadensmeldungen erhalten wir zwischen 10⁰⁰ - 11⁰⁰ am 5. Januar 2017?

① - ⑥ sind ^{verschiedene} ~~die~~ Zufallsexperimente

Wir möchten ~~die~~ sinnvolle Modelle definieren, die auch hilfreich sind, ~~um~~ ^{zu} etwas über die Zukunft zu lernen.

Diskrete W-räume: Beispiele

① Laplaceraum ~~(Ω, ℓ)~~, $|\Omega| < \infty$.

(Gleichverteilung) $\ell: \Omega \rightarrow [0, 1]$

$$\forall \omega \in \Omega \quad \boxed{\ell(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bullet \text{ Check: } \sum_{\omega \in \Omega} \ell(\omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{|\Omega|} = \\ &= |\Omega| \cdot \frac{1}{|\Omega|} = 1 \end{aligned}}$$

Beispiele: faire Münze, $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$

• fairer Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② Bernoulliraum zum Parameter $p \in [0, 1]$

(Ω, ℓ_p)

$$\Omega = \{0, 1\}$$

1: "Erfolg"

0: "Misserfolg"

$$\ell_p(0) = 1 - p$$

$$\ell_p(1) = p$$

$$\bullet \text{ Check: } \sum_{\omega \in \Omega} \ell_p(\omega) =$$

$$-(1-p) + p = 1$$

Beispiele: Wir spielen in Roulette einmal ROT.

$$p = \frac{18}{37}$$

• (nicht unbedingt ~~fairer~~ fairer) Münzwurf

3) Hypergeometrische Verteilung zu den Parametern $N, n, R \in \mathbb{N}_0, 0 \leq R, n \leq N$

$(\Omega, h_{N,n,R})$

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$h_{N,n,R}(k) = \frac{\binom{R}{k} \binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \forall k \in \Omega$$

• Check: $\sum_{k=0}^n h_{N,n,R}(k) = 1$

HAUSAUFGABE

Behauptung: Urne mit N gefärbten Kugeln (~~blau und rot~~)
 R rot + $(N-R)$ blau
 n Ziehen, OHNE Zurücklegen
 W-keit, genau k rote Kugeln zu ziehen = $h_{N,n,R}(k)$

Beweis: Wir arbeiten in dem Laplaceaum auf $\binom{[N]}{n}$.

Numerieren wir die Kugeln ~~blau~~, ~~rot~~ sagen wir die Kugeln $1, \dots, R$ sind rot und Kugeln $R+1, \dots, N$ sind blau

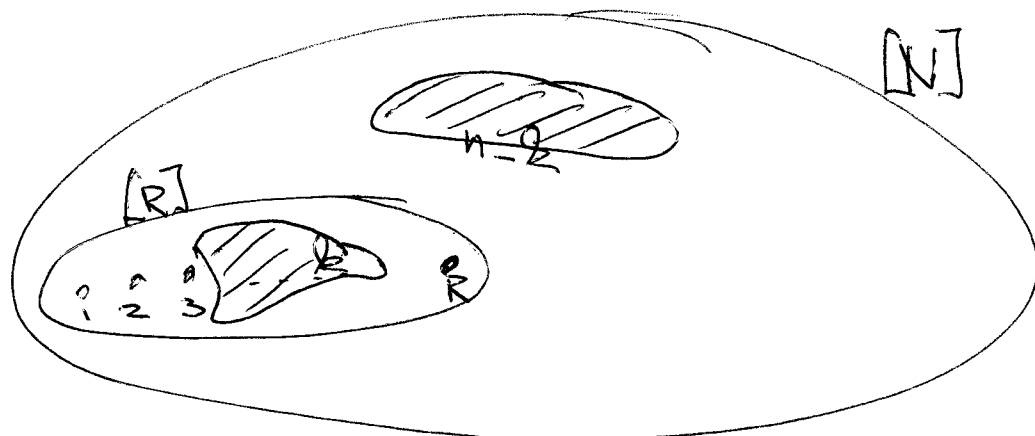
"Günstige" Elementarereignisse: $\{A \in \binom{[N]}{n} : |A \cap [R]| = k\}$

\sum_k

- $[R]$ ist die Menge der roten Kugeln
- $|A \cap [R]|$ ist die Anzahl der roten Kugeln in A

"Alle" Elementarereignisse: $\binom{[N]}{n}$

Was ist $|G_2|$?



Mehrstufige Produktregel und die Elemente A von G_2 zu zählen.

Frage 1: Was ist der Schritt von A und $[R]$?

Da A genau 2 rote Kugeln hat, ist die Anzahl der Möglichkeiten für $A \cap [R]$: $\left| \binom{[R]}{2} \right| = \binom{R}{2}$

Frage 2: Was ist $A \cap ([N] \setminus [R])$?

Da A genau $n-2$ blaue Kugeln hat, ist die Anzahl der möglichen $(A \cap ([N] \setminus [R]))$: $\left| \binom{[N] \setminus [R]}{n-2} \right| = \binom{N-R}{n-2}$

~~unabhängig~~ (unabhängig von der ersten Antwort.)

$A \cap [R]$ und $A \cap ([N] \setminus [R])$ bestimmen A eindeutig

$$\rightarrow |G_2| = \binom{R}{2} \cdot \binom{N-R}{n-2}$$

W-Zeit in Frage: $\frac{|G_2|}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{R}{2} \binom{N-R}{n-2}}{\binom{N}{n}}$ ✓

~~Beispiel~~ Bem: Abbildung $A \mapsto (A \cap [R], A \cap ([N] \setminus [R]))$ ist eine Bijektion von G_2 nach $\binom{[R]}{2} \times \binom{[N] \setminus [R]}{n-2}$.

(Inverse ist: $(M_1, M_2) \rightarrow M_1 \cup M_2$)
(Abbildung)

Beispiele (für Hypergeometrische Verteilung)

(1) Lotto $N=49$, $n=6$, $R=6$

- Rote Kugeln sind meine angekreuzten Zahlen
- $n=6$ Ziehen von Lottofirma

Dies war unser Zufallsexperiment No 2, am Anfang.

$$\text{W-Wert von 6-er} = h_{49,6,6}(6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816}$$

$$\text{5-er} = h_{49,6,6}(5) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\cancel{2.100.000} 55,492}$$

$$\text{4-er} = h_{49,6,6}(4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\cancel{1000} 1033}$$

$$\text{3-er} = h_{49,6,6}(3) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\cancel{500} 56,7}$$

$$\text{2-er} = h_{49,6,6}(2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\cancel{700} 8,3} \approx 0,132$$

$$\text{1-er} = h_{49,6,6}(1) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} \approx 0,413$$

$$\text{0-er} = h_{49,6,6}(0) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} \approx 0,436$$

5 vor 90 Lotto $\rightsquigarrow h_{90,5,5}$

$$\text{5-er} = \frac{1}{\binom{90}{5}} \approx 2,28 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{4-er} \approx 9,7 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{3-er} \approx 8,1 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{2-er} \approx 0,022$$

$$\text{1-er} \approx 0,23$$

$$\text{0-er} \approx 0,74$$

"Psychologie":
Fast jede zweite
Wochepassiert etwas

5 vor 90; nur jede
vierte Woche
passiert etwas

Beispiel 2. für hypergeometrische Verteilung:

Meinungsbild: Unterstützen Sie Politiker XY? JA/NEIN

$$N = 40.000.000$$

Rote Kugel: Leute
die unterstützen
Politiker XY

$R = ?$ ~~40.000.000~~ (wir wissen diese Zahl
nicht, aber wir möchten
eine Idee darüber haben)

$$n = 1000$$

(wir fragen n zufällige
Leute)

Was können wir schließen, wenn wir 750 JA
Antworten bekommen haben?

(Und unsere Auswahl der Leute WIRKLICH zufällig war.)

Natürlich: wir möchten so etwas sagen:

"Etwa 30.000.000 Menschen ^(unterstützen) Politiker XY"

Aber es ~~ist~~ ist nicht sicher: es kann sein
dass in Realität R ist 17.000.000 und ~~wir~~
wir einfach 750 von unseren 1000 zufällige Kugeln
von diesen 17.000.000 gezogen haben.

Dies scheint nicht sehr Wahrscheinlich, denn

$h_{40000000, 1000, 17000000}(750)$ ist sehr-sehr-sehr klein.

Aber ... um in der Lage ^{zu} sein, eine Aussage
der ~~Art~~ folgenden Art zu machen: "Die Anzahl der Unterstützer
von Politiker XY ist zwischen 29 und 31 Millionen mit Sicherheit 99%"
müssen wir die hypergeometrische Verteilung studieren.

- Ist es wirklich wichtig dass die "Zufälligen" Leute die ich für die Meinungsbild auswähle, alle verschiedene sind? Oder kann ich auch die Leute "mit Zurücklegen" auswählen?
- Wir werden sehen dass, die zwei Meinungsbilder (mit oder ohne Zurücklegen die zufälligen Leute ^{zu} auswähle) zu ähnlichen Ergebnissen führen. (weil $n=1000$ so viel kleiner im Vergleich zu N , R , und $N-R$ ist.)

Binomial Verteilung

zuden Parametern $n, p,$

$$n \in \mathbb{N}_0, p \in [0, 1]$$

$$(\Omega, \mathcal{L}_{n,p})$$

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$b_{n,p}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

• Check: $\sum_{\omega \in \Omega} b_{n,p}(\omega) =$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Binomialsatz

Behauptung: Urne mit N gefärbte Kugel
 " " " " " "
 R rot + $(N-R)$ blau

$$N, n, R \in \mathbb{N}_0$$

$$0 \leq n, R \leq N$$

n Ziehen, MIT Zurücklegen

W-keit von genau k rote Kugel zu ziehen = $b_{n, \frac{R}{N}}(k)$

Beweis: Wir nummerieren die Kugeln, ^{es} seien Kugeln $1, 2, \dots, R$ rot und Kugeln $R+1, \dots, N$ blau.

Laplaceraum auf ~~$[N]^n$~~ $[N]^n$

"Günstige" Elementarereignisse: n -Tupel mit genau k Koordinaten die $\in R$ sind (d.h. Kugel ist rot)

$$\text{Formal } G_k = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in [N]^n : |\{i \in [n] : x_i \in R\}| = k \right\}$$

Wie groß ist $|G_k|$?

Mehrstufige Produktregel:

Frage #1: Welche k der n Koordinaten, halten rote Kugeln?

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

Frage #2: Was ist das k -Tupel vor roten Kugeln vor links ~~rechts~~ nach rechts?

R^k Möglichkeiten (weil jedes der möglichen k -Tupel vor $[R]^k$ vorkommen kann)

Frage #3: Was ist das $(n-k)$ -Tupel vor blauen Kugeln vor links nach rechts?

Alle Tupel vor $([N] \setminus [R])^{n-k}$ sind möglich

$$\leadsto |G_k| = \binom{n}{k} \cdot R^k \cdot (N-R)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} \text{W-Wert vor genau } k \text{ roten} &= \frac{|G_k|}{|[N]^n|} = \frac{\binom{n}{k} \cdot R^k \cdot (N-R)^{n-k}}{N^n} \\ &= \binom{n}{k} \frac{R^k}{N^k} \cdot \frac{(N-R)^{n-k}}{N^{n-k}} = \binom{n}{k} \left(\frac{R}{N}\right)^k \left(1 - \frac{R}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{R}{N}\right)^k \left(\frac{N-R}{N}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die binomiale Verteilung

~~Wenn N und R sind groß im Vergleich zu n~~

Die genaue Formel für die hypergeometrische Verteilung ist kompliziert:

$$h_{N,R,n}(k) = \frac{\binom{R}{k} \cdot \binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{R! (N-R)! \cdot n! (N-n)!}{k! (R-k)! (N-k)! (N-R+n-k)! N!}$$

Warum?

Denn wir ziehen **OHNE** zurücklegen.

Für die erste Kugel die Chance für Rot = $\frac{R}{N}$

Aber für die zweite Kugel, die Chance für Rot hängt von dem Ergebnis der ersten ~~Z~~ Ziehung ab:

Entweder $\frac{R}{N-1}$ oder $\frac{R-1}{N-1}$

Und so weiter: die W-keit für rote in der i ten

$i \leq n$

Ziehung hängt von der Anzahl der Erfolge in den vorherigen ~~Z~~ Ziehungen ab.

Es stimmt zwischen $\frac{R-i+1}{N-i+1}$ und $\frac{R}{N-i+1}$

Idee:

Wenn N und R sind groß im Vergleich

zu n , dann ~~$\frac{R-i+1}{N-i+1} \approx \frac{R}{N}$~~ $\frac{R-i+1}{N-i+1} \approx \frac{R}{N} \approx \frac{R}{N-i+1}$

\Rightarrow W-keit von rot in i ten Ziehung \approx W-keit von rot in i te Ziehung
MIT ZURÜCKLEGEN

Hoffentlich kann man die W-keit mit der einfacheren "Binomial-

Formal:

Satz: ~~Es~~ Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$
und sei $p \in (0, 1)$,

Für jede Folge $R_1, R_2, \dots \in \mathbb{N}$

$N_1, N_2, \dots \in \mathbb{N}$ von natürlichen
Zahlen

so dass $\lim_{l \rightarrow \infty} N_l = +\infty$

und

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{R_l}{N_l} = p$$

~~Es~~ gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} h_{N_l, R_l, n}(k) = h_{n, p}(k)$$

Bemerkung: $\lim_{l \rightarrow \infty} R_l = +\infty$ ~~da~~ weil $p \neq 0$

$\lim_{l \rightarrow \infty} N_l - R_l = +\infty$ weil $p \neq 1$

Beispiel: Für das Meinungsbild \dots mit $N = 40,000,000$

$$R = 17,000,000$$

$$n = 1000$$

$$0,0071159$$

//

hoffentlich

$\binom{1000}{k} \left(\frac{17}{40}\right)^k \left(\frac{23}{40}\right)^{1000-k}$ wäre eine gute Approximation // $0,0071150$

für die annähernd W -bit $\frac{\binom{17000000}{k} \binom{23000000}{1000-k}}{100000000}$

Beweis:

$$h_{N_e, R_e, n}(k) = \frac{\binom{R_e}{k} \cdot \binom{N_e - R_e}{n - k}}{\binom{N_e}{n}}$$

$$= \frac{R_e \cdot (R_e - 1) \cdot \dots \cdot (R_e - k + 1)}{k!} \cdot \frac{(N_e - R_e)(N_e - R_e - 1) \cdot \dots \cdot (N_e - R_e - n + k + 1)}{(n - k)!}$$

$$= \frac{N_e(N_e - 1) \cdot \dots \cdot (N_e - n + 1)}{n!}$$

$$= \frac{h!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{R_e(R_e-1)\dots(R_e-k+1)(N_e-R_e)(N_e-R_e-1)\dots(N_e-R_e-n+k+1)}{N_e(N_e-1)\dots(N_e-k+1)(N_e-k)\dots(N_e-n+1)}$$

$\left. \begin{array}{l} k \text{ Faktoren} \\ \downarrow \\ \ell \rightarrow \infty \\ p^k \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} n-k \text{ Faktoren} \\ \downarrow \\ \ell \rightarrow \infty \\ (1-p)^{n-k} \end{array} \right\}$

$\binom{n}{k}$

Konstant

for $i < k - 1$

$$\frac{R_e - i}{N_e - i} = \frac{R_e}{N_e} \cdot \frac{(1 - \frac{i}{R_e})}{(1 - \frac{i}{N_e})} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} p \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0} = p$$

~~weil~~
weil

$i \leq k - 1 < n$ ist konstant
 $\lim_{\ell \rightarrow \infty} R_e = +\infty = \lim_{\ell \rightarrow \infty} N_e$

for $i < n - k$

$$\frac{N_e - R_e - i}{N_e - k - i} = \frac{N_e - R_e}{N_e} \cdot \frac{(1 - \frac{i}{N_e - R_e})}{(1 - \frac{k+i}{N_e})} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} (1 - p) \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1 - p$$

weil $i, i+k < n$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} N_e - R_e = +\infty = \lim_{\ell \rightarrow \infty} N_e$$

5. Poisson Verteilung

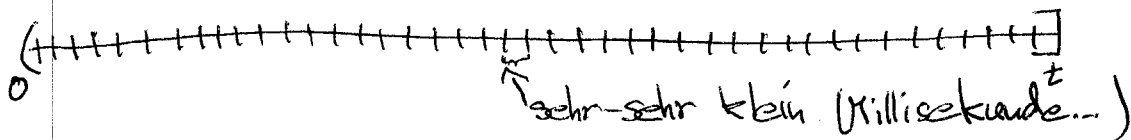
Wie viele Schadensmeldungen erhält z.B. eine Kfz-Haftpflichtversicherung in einem festen Zeitintervall $(0, t] > 0$?

Welcher W-Raum ist vernünftig, dies zu modellieren?

$$\Omega := \mathbb{N}_0 \quad \mathbb{P} = ?$$

Heuristische Überlegung:

- Zerlegen wir ~~das~~ das Zeitintervall $(0, t]$ in n Teilintervalle der Länge $\frac{t}{n}$



- Annahmen: (1) In jedem Teilintervall höchstens ein Schaden eintritt.
(2) W-keit für solch einen Schadenfall ist proportional zur Länge des Teilintervalls \rightarrow \exists konstante α , sd. W-keit eines Schadenfall in einem festen Intervall der Länge $\frac{t}{n}$ ist $\alpha \frac{t}{n}$
(3) Auftreten eines Schadens in einem Teilintervall nicht davon abhängt; ob in einem anderen ein Schaden auftritt (oder nicht)

\rightsquigarrow "Unglücksfee" zieht für jede der n Teilintervalle aus einer Urne, die einen Anteil $\alpha \frac{t}{n}$ von "Schadenskugeln" enthält.
(Mit Zurücklegen, Ergebnis: geordnet)

\rightsquigarrow W-keit für genau k Schaden = $b_{n, \alpha \frac{t}{n}}(k)$

\rightsquigarrow Für unsere \mathbb{P} wählen wir n größer und größer

$$\mathbb{P}(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n, \alpha \frac{t}{n}}(k)$$

Definition: Poisson Verteilung zum Parameter $\lambda > 0$

$$(\Omega, P_\lambda)$$

$$\Omega = \mathbb{N}_0$$

$$\forall k \in \Omega \quad P_\lambda(k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

• Check: $\sum_{\omega \in \Omega} P_\lambda(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} P_\lambda(k)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = 1$$

\parallel
 e^λ

Approximation der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung

Satz: Es sei $\lambda > 0$. Dann für ~~alle~~ $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n, \frac{\lambda}{n}}(k) = P_\lambda(k)$$

Bemerkung: Gleiche Folgerung gilt auch, wenn, statt $p_n = \frac{\lambda}{n}$,
 p_n : eine beliebige Folge in $[0, 1]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ ist.

$$\text{Dann: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n, np_n}(k) = P_\lambda(k).$$

Beweis: Immer erinnern: k ist Konstant,
 ändert sich NICHT wenn n nach ∞ läuft.

$$p_n = \frac{\lambda}{n}$$

$$b_{n, \lambda}(k) = \binom{n}{k} \cdot p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot p_n^k \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k}$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \dots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \dots n} \cdot \underbrace{n^k \cdot p_n^k}_{(n \cdot p_n)^k} \cdot \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k}$$

$(1-p_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$
 $(1-p_n)^k$
 $\downarrow n \rightarrow \infty$
 $(1-0)^k = 1$
 weil k konstant ist

$\downarrow n \rightarrow \infty$
 λ^k
 weil k konstant ist
 und $\frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n} \rightarrow 1$
 für $0 < i \leq k-1$

~~weil k konstant ist~~

$$(1-p_n)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$$

weil λ konstant ist.

Also:

$$b_{n, \lambda}(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_\lambda(k)$$

□

Bemerkung: wenn wir nur annehmen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$

Dann benutzt man: $\forall x \in [-0.1, 0.1]$

$$e^{-x-x^2} \leq (1-x) \leq e^{-x} \Rightarrow e^{-np_n - p_n^2} \leq (1-p_n)^n \leq e^{-np_n}$$

\forall kleine y
 $e^{-y} < 1 - y + \frac{y^2}{2}$
 $\Rightarrow e^{-x-x^2} < 1 - (x+x^2) + \frac{(x+x^2)^2}{2} = 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{2} < 1 - x$

immer
 $\downarrow n \rightarrow \infty$
 $e^{-\lambda-0}$

$\downarrow n \rightarrow \infty$
 $e^{-\lambda}$

Zurück zu Benchmark-Beispielen (Zufallsexperimente)

- ① Augenzahl bei einem Würfelwurf \leadsto Laplace-Raum
 - ② Anzahl der richtige Zahlen beim Lotto \leadsto Hypergeometrische Verteilung
 - ③ Anzahl der ROT während 100 Roulette-Runde \leadsto Binomialverteilung
 - ④ Anzahl der Anrufe ~~...~~ während einem festen Zeitintervall \leadsto Poissonverteilung
-
- ④ Wie lang müssen wir warten für das erste ROT in Roulette?

Geometrische Verteilung

zum Parameter q , $0 < q < 1$

$$\Omega = \mathbb{N}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad g_q(k) := q^{k-1} (1-q)$$

Check: $\sum_{k \in \mathbb{N}} g_q(k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k-1} (1-q)$

$$= (1-q) \sum_{j=0}^{\infty} q^j = (1-q) \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

\uparrow
geometrische Reihe

Bemerkung: q ist die "Misserfolg"-Wahrscheinlichkeit

• Antwort für Zufallsexperiment H : Verteilung $g_{\frac{19}{37}}$

• Die Verwendung der Formel $q^{k-1}(1-q)$ für jede k ist voll gerechtfertigt, (die Anzahl der k -Tupel von Kugeln aus einer Urne mit einem Anteil von $(1-q)$ rote Kugeln, ~~...~~ sodass die ersten $k-1$ blau sind und die letzte ist rot, ist $(qN)^{k-1} \cdot (1-q)N$ ALLE MÖGLICHE = N^k . Aber der RAUM $(\mathbb{N})^k$ ist verschieden für jedes k .