Summenregel: Wenn Menge $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ ist die Vereinigung von paarweise disjunkte Mengen $S_1, \ldots, S_k$, dann gilt $$|S| = \sum_{i=1}^{k} |S_i|$$

- Grundlage für alle Fallanalyse
- Wenn wir eine Menge S abzählen möchte, klassifizieren wir oft die Elemente von S nach gewissen Eigenschaften E_i $(i=1,\ldots,k)$, die sich gegenseitig ausschließen, und ~~so~~ zählen wir sondern die Teilmengen $S_i = \{x \in S : x \text{ hat Eigenschaft } E_i\}$ ab. ("Divide and conquer.")

Beispiel: (1) Erste Klasse: Eine Schublade enthält 8 gelbe, 5 blaue, 3 grüne Paar Socken. Wie viele Paare gibt es in der Schublade?

Lösung: Summenregel, ~~mit~~ Eigenschaften: Farbe

(2.) Rekurzion für die Anzahl der k-elementige Teilmenge von $[n]$.

X ist eine Menge, $k \in \mathbb{N}_0$

Notation: $\binom{X}{k} := \{T \subseteq X : |T| = k\}$

$\binom{n}{k} := \left|\binom{[n]}{k}\right|$ "n über k" "n choose k"

$[n] := \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$

~~Bew~~

Beispiel:

$[4] = \{1,2,3,4\}$

$\binom{[4]}{3} = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$

$\binom{4}{3} = \left|\binom{[4]}{3}\right| = 4$

$\binom{0}{0} = 1$ (= Anzahl der Teilmenge der 0-elementige Menge genau 1. ($\emptyset$ ist die einzige)

Behauptung (Pascal Rekursion)

$$\forall \; n \geq k \geq 0 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Bemerkung: Wir "wissen" noch kein Formel für $\binom{n}{k}$ ... :)

Beweis: Klassifizieren die k-elementige Teilmengen von $[n]$ nach ob sie n enthalten oder nicht.
Und dann benutzen wir die Summenregel

$$S_1 = \left\{ T \in \binom{[n]}{k} : n \in T \right\}$$

$$S_2 = \left\{ T \in \binom{[n]}{k} : n \notin T \right\}$$

- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $S_1 \cup S_2 = \binom{[n]}{k}$

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Summenregel}}}{=} |S_1| + |S_2| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$|S_2| = \left|\binom{[n-1]}{k}\right|$$

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xleftrightarrow{\text{Bijektion}} & \binom{[n-1]}{k-1} \\ \cup\!\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!\!| \\ T & \longleftrightarrow & T \setminus \{n\} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad |S_1| = \left|\binom{[n-1]}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1}$$

$\square$

Produktregel: $T_1, \ldots, T_\ell$ Mengen

$$\Longrightarrow \left| \underbrace{T_1 \times \ldots \times T_\ell}_{\{(t_1,\ldots,t_\ell)\,:\, t_i \in T_i \;\forall i\}} \right| = \prod_{i=1}^{\ell} |T_i|$$

- "Klug Summeregel": Nach Klassifizierung der Menge S nach ~~Mengen~~ Eigenschaften E_i, wir sehen das die paarweise disjunkte Mengen $S_i = \{x \in S : x \text{ hat } E_i\}$ haben die GLEICHE Kardinalität! $|S_i| = |S_j| \;\forall i,j$

Dann natürlich zählen wir schneller:

$$S = \left| \bigcup_{i=1}^{\ell} S_i \right| = |S_1| + \ldots + |S_\ell| = \ell \cdot |S_1|$$

BEISPIEL:

1. ERSTE Klasse: In Schublade gibt es 8 gelbe, 8 blaue 8 grüne Sockenpaare. Wie viele Paare gibt es?

   (Socken Formen Produktmenge $: \{G, B, Gr\} \times [8]$)

2. Anzahl der 0/1 Vektor der Länge n.

$$\left| \{0,1\}^n \right| = \left| \{0,1\} \right|^n = 2^n$$

Notation: Menge X, $\ell \in \mathbb{N}$

$$X^\ell = \{ (x_1, \ldots, x_\ell) : x_i \in X \;\forall i \}$$

ELEMENTARE ZÄHLPRINZIPEN

Wir werden immer die Elemente einer **MENGE** zählen.

Bijektionsregel: Seien S, T Mengen.

$$\exists \text{ Bijektion } f: S \to T \implies |S| = |T|$$

Beispiel: Wie viele Teilmengen eine n-elementige Menge hat?

Def: Menge X $\to$ Potenzmenge von X:

$$\boxed{\mathcal{P}(X) := \{T : T \subseteq X\}}$$

$N \in \mathbb{N}$ $\to$ $[N] := \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq N\}$

Beispielen:

$X = \{1, 3\}$ dann

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$

$[6] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\boxed{\text{Behauptung: } |\mathcal{P}([N])| = 2^N}$$

Beweis: Definieren wir eine Funktion $f: \mathcal{P}([N]) \to \{0,1\}^N$

Für $A \in \mathcal{P}([N])$ $f(A)_i := \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \notin A \\ 1 & \text{wenn } i \in A \end{cases}$

$f(A)$ ist der charcteristic Vektor von A

Beispiel: $N = 4$
$A = \{1, 4\} \subseteq [4]$
$f(A) = (1, 0, 0, 1)$

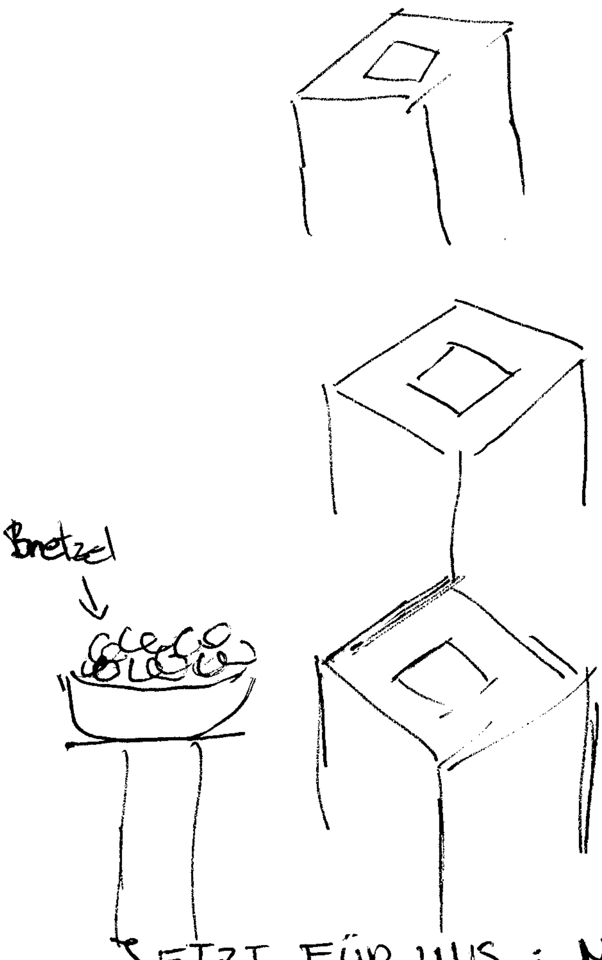
- f ist eine Bijektion:

$$\left|\{0,1\}^n\right| = \left|\{0,1\}\right|^n = 2^n$$
$\downarrow$
Produktregel

- Injektion: Für $A \neq B$ $\exists i \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$\Rightarrow (f(A))_i \neq (f(B))_i \Rightarrow f(A) \neq f(B)$
- Surjektion: Für jedem Vector $v \in \{0,1\}^n$
$\exists A \in \mathcal{P}([N])$ sodass $f(A) = v$.
Sei $A := \{i \in [N] : v_i = 1\}$

Beispiel: 6 Leute. Sie spielen Schach.

Wie viele Wegen gibt es Sie bei 3 Schachbrette zu setzen?



Formulieren wir eine präzise Frage!

- Ist es wichtig wer spielt mit weiss?
- Ist es wichtig wer neben dem Bretzel sitzt?

ALLES verschiedene Probleme!

SETZT, FÜR UNS: NEIN und NEIN

Menge der Leute $M = \{\text{Alice}, \text{Bob}, \text{Carole}, \text{Daniel}, \text{Emma}, \text{Frank}\}$

Wir müssen folgende Menge abzählen $\left\{ \{A_1, A_2, A_3\} : \begin{array}{l} A_1 \cup A_2 \cup A_3 = M \\ |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2 \\ A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \end{array} \right\}$

(1) Wählen wir A_1: $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten

(2) wenn A_1 ist ausgewählt: Es gibt $\left|\binom{M \setminus A_1}{2}\right| = \binom{4}{2}$ Möglichkeiten A_2 auszuwählen

(3) wenn A_1 und A_2 sind schon ausgewählt $\Rightarrow A_3 = M \setminus (A_1 \cup A_2)$ ist determiniert

Jede Menge $\{A_1, A_2, A_3\}$ wurde auf diesem Weg $3! = 6$ mal ausgewählt

So $$\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 1}{3!} = \frac{15 \cdot 6}{6} = \underline{\underline{15}}$$

Alternativer Weg:

Frage #1: Wer ist Partner von Alice?

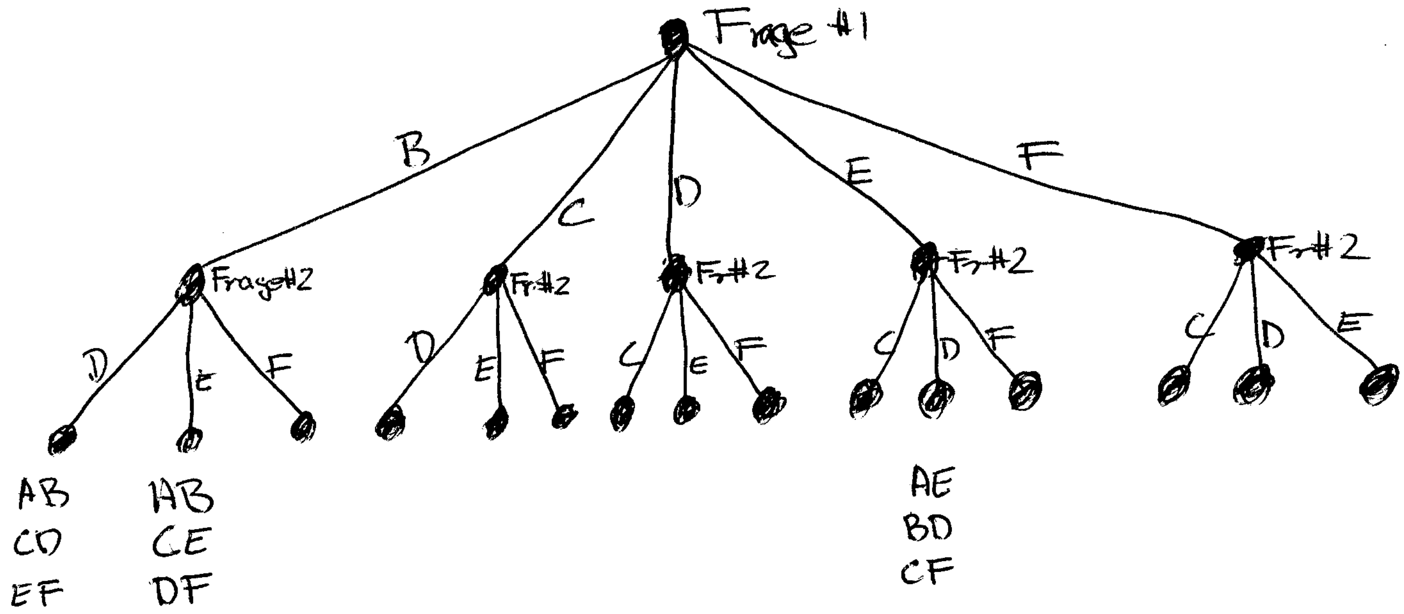
5 mögliche Antworten

Frage #2: Wer ist der Partner der Person deren Name als erstes im Alphabet kommt, nach dem die Namen von Alice und ihrem Partner entfernt wurden?

3 mögliche Antworten – egal was der erste Antwort war

Frage #3 -----

1 mögliche Antwort – egal was die ersten zwei Antworten waren



So $5 \cdot 3 = \underline{\underline{15}}$ Möglichkeiten, verschieden Antwort-Tupel geben verschieden Paarungen

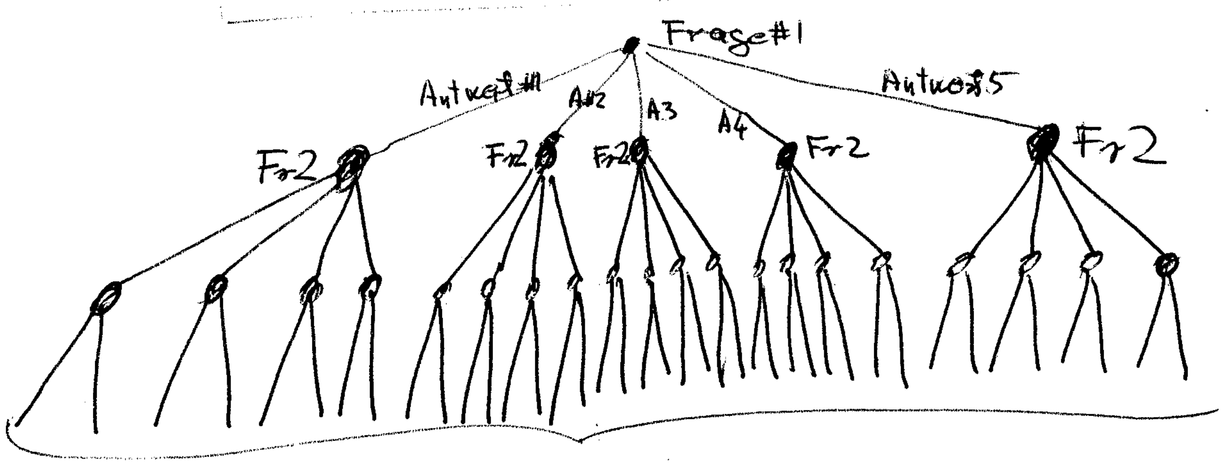
MEHRSTUFIGE PRODUKTREGEL

Wir kodieren (eindeutig) die Elemente einer Menge S als ein k-Tupel von Antworten für ~~[illegible]~~ eine Sequenz von k Fragen

- Es gibt t_1 mögliche Antworten für die erste Frage. Die Antworten sind gegenseitig ausschließend
- Für die i^{te} Frage gibt es t_i mögliche Antworten — egal was die Antworten für die ersten $i-1$ Fragen waren.

Auch für die i^{te} Frage: die möglichen Antworten sind gegenseitig ausschließend.

Dann $\boxed{|S| = \prod_{i=1}^{k} t_i}$



$5 \cdot 4 \cdot 2$

Spezialfall: Produktregel $|T_1 \times \dots \times T_k| = \prod_{i=1}^{k} |T_i|$

Frage #i: Was ist die i^{te} Koordinate?

$|T_i|$ mögliche Antworten