Erste Hälfte der Vorlesung: Ω höchstens abzählbar
(d.h. $|\Omega| < \infty$ oder Ω abzählbar unendlich)

Definition: Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ wobei
(DW1) Ω ist eine (höchstens abzählbare) Menge
(DW2) $\mathbb{P}: \Omega \to [0,1]$ ist eine Abbildung, sodass $\boxed{\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1}$

- Elemente von Ω: Elementarereignisse
- Ω: Menge der Elementarereignisse
- $\mathbb{P}$: Wahrscheinlichkeitsmaß

- $\mathbb{P}(\omega)$: Wahrscheinlichkeit des Elementarereignis $\omega \in \Omega$.
- Man kann $\mathbb{P}$ auf die ganze Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ erweitern: $\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir

$$\boxed{\mathbb{P}(E) := \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}(\omega)}$$

(Für $\omega \in \Omega$: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\omega)$)

- Eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$ wird Ereignis genannt.
$\Updownarrow$
($E \in \mathcal{P}(\Omega)$)

Bemerkungen: • Da Ω höchstens abzählbar ist, kann man sich unter $\mathbb{P}$ eine Sequenz von Zahlen (alle zwischen 0 und 1) vorstellen.
• Oft wird Verteilung als Synonym für W-Maß verwendet.

Eigenschaften von W-Maßen

Satz: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskretes W-Raum. Dann $\forall$ Folge $E_1, \dots, E_n, \dots \subseteq \Omega$ von paarweise disjunkten Ereignissen gilt: $\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

~~Beweis~~ **Beweis:**

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{\omega \in \cup E_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in E_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

weil jedes $\omega \in \cup E_i$ in genau eins E_i enthalten ist und weil $(\mathbb{P}(\omega))_{\omega \in \cup E_i}$ eine absolute konvergente Reihe ist, die man beliebig umordnen kann ohne die Endsumme zu ändern.

Korollar: (1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(2) $\forall E \subseteq \Omega$ gilt: $\mathbb{P}(\Omega \setminus E) = 1 - \mathbb{P}(E)$

(3) $\forall E_1, \dots, E_n \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt (d.h. $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$) gilt: $\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$

(4) $\forall E \subseteq F \subseteq \Omega$ gilt: $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

(5) $\forall E_1, \dots, E_n, \dots \subseteq \Omega$ gilt: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

(6) $\forall E, F \subseteq \Omega$ gilt: $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

Beweis: (1) $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \boxed{\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}} 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots \boxed{\Rightarrow} \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(3) Satz benutzt mit $E_{n+1} = E_{n+2} = \dots = \emptyset$: $\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i}^{n} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) + \underbrace{\mathbb{P}(\emptyset) + \dots}_{= 0}$

(2) folgt von (3): $E_1 = E$, $E_2 = \Omega \setminus E$.

(4) folgt von (3): $F = E \cup (F \setminus E) \overset{(3)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E) \geq \mathbb{P}(E)$

weil $\mathbb{P}(F \setminus E) \geq 0$

(5) Def: $F_n := E_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)$. Dann $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ist paarweise disjunkt Folge und $E_n \supseteq F_n$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)} = \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} F_n\right) \overset{\text{Satz}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) \overset{(4)}{\leq} \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)}$$

(6.) $\mathbb{P}(E \cup F) \overset{(3)}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E)$ ...

Zufallsvariable

Def: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ einen diskreten W-Raum und C eine (höchstens abzählbare) Menge.
Eine C-wertige Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$Z : \Omega \longrightarrow C.$$

Beispiel: 1. $E \subseteq \Omega$ ist eine Ereignis. $\mathbb{P}$ beliebig.
Die Indikatorzufallsvariable von E ist die Abbildung

$$\chi_E : \Omega \to \{0,1\}, \quad \chi_E(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \in E \\ 0 & \text{wenn } \omega \notin E \end{cases}$$

2. $\Omega = \binom{[49]}{6}$ $\mathbb{P}$ ist die Gleichverteilung (Laplaceraum)

$$Z : \Omega \to \{0,1,2,3,4,5,6\}, \quad Z(M) := |M \cap [6]| \quad \forall M \in \Omega$$

"Wie viel richtige Zahlen im Lotto?"

3. $\Omega = \{0,1,2,\dots,36\}^{100}$ $\mathbb{P}$ ist die Gleichverteilung (Laplaceraum)

$$Z : \Omega \longrightarrow \{0,1,2,\dots,100\} \quad Z(x) = \left|\left\{ i \in [100] : x_i \text{ ist ROT an dem Roulettekessel} \right\}\right|$$

"Anzahl der rote im 100 Roulette Runde"

Zufallsvariable: "Kompression von Informationen"

- Genau welche 6 Zahlen im Lotto gezogen waren: zu viel Information

Es reicht das zu wissen, wie viele Richtige ich angekreuzt habe

Satz: Es sei
- $(\Omega, \mathbb{P})$ einen diskreten W-Raum
- C eine (höchstens abzählbare) Menge
- $Z : \Omega \to C$ eine Zufallsvariable

Dann die Abbildung $\mathbb{P}_Z : C \to [0,1]$, $\mathbb{P}_Z(c) := \mathbb{P}(Z^{-1}(c))$ $\forall c \in C$

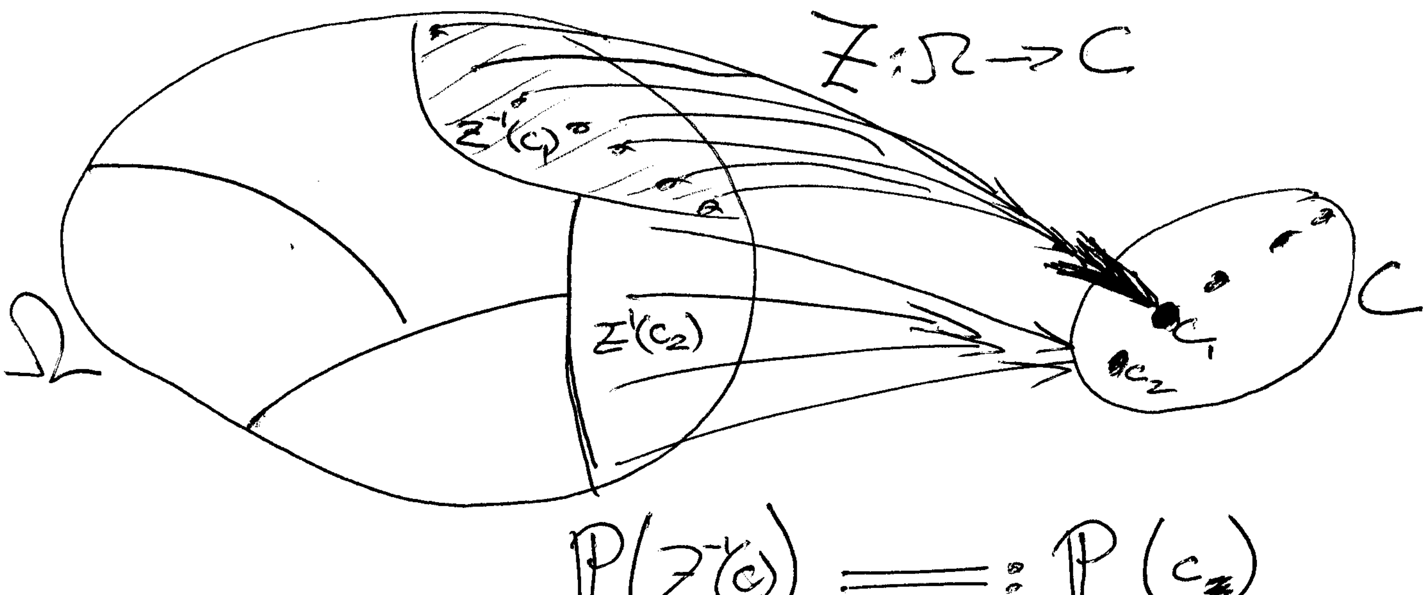
definiert eine diskrete W-Maß auf C.

Bemerkung: $\mathbb{P}_Z$ ist das durch Z induzierte W-Maß genannt,
(oder: Verteilung von Z (bei $\mathbb{P}$))

Beweis:

$$\sum_{c\in C} \mathbb{P}_Z(c) := \sum_{c\in C} \mathbb{P}(Z^{-1}(c)) = \sum_{c\in C} \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ Z(\omega)=c}} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$$

jedes $\omega\in\Omega$ kommt für genau eins c vor $\square$



$$\mathbb{P}(Z^{-1}(c)) =: \mathbb{P}_Z(c)$$

Die W-keit von eines $c \in C$ ist so definiert, dass es gleich die W-keit der Menge von solch Elemente von Ω, die Z nach c abbildet.

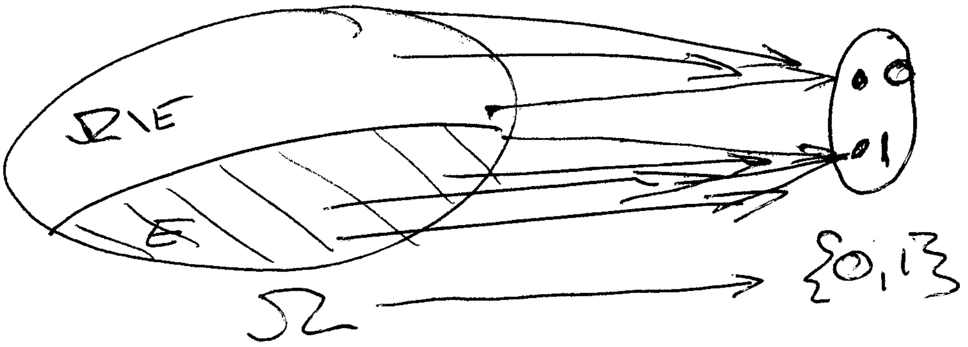
Beispiele:

1. X_E ist Indikatorzufallsvariable von Ereignis $E \subseteq \Omega$

Dann $\mathbb{P}(X_E^{-1}(1)) = \mathbb{P}(E)$

und $\mathbb{P}(X_E^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\Omega \setminus E)$

Also $\mathbb{P}_{X_E} : \{0,1\} \to [0,1]$ ist ein Bernoulli verteilung mit Parameter $\mathbb{P}(E)$



2. $\Omega = \binom{[49]}{6}$ mit Gleichverteilung

$Z : \Omega \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\quad Z(M) := |M \cap [6]| \ \forall M \in \Omega$

$\mathbb{P}_Z$ ist die hypergeometrische Verteilung mit Parameter 49, 6, 6

3. $\Omega = \{0,1,2,\ldots,36\}^{100}$ mit Gleichverteilung

$Z : \Omega \longrightarrow \{0,1,2,\ldots,100\}$

$\forall x \in \Omega \ Z(x) = |\{ i \in [100] : x_i \text{ ist eine rote Zahl in Roulette} \}|$

$\mathbb{P}_Z$ ist die Binomialverteilung mit Parameter $n = 100$, $p = \frac{18}{37}$

Erwartungswert von reelwertigen ZV

- Diskrete W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$
- ZV $Z: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (Werte sind reele Zahlen)

Wenn wir nur eins Information/Zahl über Z fragen können, was möchten wir wissen? Welche Zahl säge die meistens über Z?

- ~~Die~~ Zahl, die irgendwie ausdrückt, was wir von Z im Mittel erwarten können.

Beispiele, wo es wichtig ist, den Mittelwert von Z zu kennen:

- Wie hoch wird der Gewinn im Mittel bei einem Glückspiel? (Lotto, Roulette, Black Jack, ...)
- Wie viele Anrufe im Durchschnitt wird das Call-Center meines Unternehmens in einem festen Zeitinterval erhalten?
- Mit welcher mittleren Schadenshöhe sollte ein Versicherungsunternehmen in nächsten Jahr zählen?

Erwartungswert von Z: die äußerste konzentrierte Information über Z.

Wie sollten wir es definieren?

Motivation für die Definition (aus endlichen Räumen)

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ $\quad$ $\mathbb{P}: \Omega \to [0,1]$

Wenn $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ m-Mal abgefragt

Und, z.B, bekommen wir
m_1-Mal ω_1
m_2-Mal ω_2
$\vdots$
m_n-Mal ω_n

Dann der Mittelwert ist $\dfrac{m_1 Z(\omega_1) + \dots + m_n Z(\omega_n)}{m}$

wobei $m = m_1 + \dots + m_n$.

Wenn m groß genug ist (im Vergleich zu $\frac{1}{\mathbb{P}(\omega_i)}$ $\forall i \in [n]$), dann sollte sich der relative Anteil von ω_i, also $\frac{m_i}{m}$) gut durch $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ approximieren lassen:

Also: $\dfrac{m_1 Z(\omega_1) + \dots + m_n Z(\omega_n)}{m} = \frac{m_1}{m} Z(\omega_1) + \dots + \frac{m_n}{m} Z(\omega_n) \approx \mathbb{P}(\omega_1) Z(\omega_1) + \dots + \mathbb{P}(\omega_n) \cdot Z(\omega_n)$

Definition: $(\Omega, \mathbb{P})$ ist diskrete W-Raum

$Z: \Omega \to \mathbb{R}$ ist ZV

Z besitzt einen Erwartungswert wenn $\sum_{\omega \in \Omega} |Z(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) < \infty$.

In diesem Fall ist die Summe $\boxed{E(Z) := \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)}$

wohldefiniert und heißt der Erwartungswert von Z.

Bemerkung: (1) Die Bedingung $\sum_{\omega\in\Omega} |Z(\omega)| \mathbb{P}(\omega) < \infty$ (absolut Konvergenz) ist nötig, weil andernfalls keine eindeutige Zahl existiert wo die Reihe $\sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\cdot \mathbb{P}(\omega)$ konvergiert.

Z.B.: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ ist beliebig W-Maß auf Ω mit $\mathbb{P}(i) \neq 0 \quad \forall i \in \Omega$ (z.B. Poisson)

Dann Z, $Z(i) := \frac{(-1)^i}{\mathbb{P}(i)}$, hat keine Erwartungswert

Auch $W: \Omega \to \mathbb{R}$, $W(i) := \frac{(-1)^i}{i\,\mathbb{P}(i)} \quad \forall i \in \Omega$, hat keine

Aber $U: \Omega \to \mathbb{R}$, $U(i) := \frac{(-1)^i}{i^2\,\mathbb{P}(i)} \quad \forall i \in \Omega$, hat!

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{i=1}^{\infty} U(i)\mathbb{P}(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

(2) Wenn $|\Omega| < \infty$: $\sum_{\omega\in\Omega} |Z(\omega)|\cdot \mathbb{P}(\omega) < \infty \quad \forall$ ZV $Z: \Omega \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Erwartungswert existiert für jedes ZV $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ mit endlichem Definitionsbereich Ω

Behauptung: $(\Omega, \mathbb{P})$ ist diskrete W-Raum

$Z: \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine ZV

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{c \in Z(\Omega)} c \cdot \mathbb{P}_Z(c)$$

Beweis:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{c \in Z(\Omega)} \sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)$$

Klassifizieren wir Elemente von Ω nach ihrem Bild in Z.

Für $\omega \in Z^{-1}(c)$: $Z(\omega) = c$

$$= \sum_{c \in Z(\Omega)} \sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} c \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{c \in Z(\Omega)} c \cdot \sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} \mathbb{P}(\omega)$$

$$\sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(Z^{-1}(c)) = \mathbb{P}_Z(c)$$

$$= \sum_{c \in Z(\Omega)} c \cdot \mathbb{P}_Z(c)$$

$\square$

„Erwartungswert einer Verteilung" $\mathbb{P}: \Omega \to [0,1]$, $\boxed{\Omega \subseteq \mathbb{R}}$ ist die Erwartungswert der ZV $\mathrm{Id}: \Omega \to \Omega$, $\mathrm{Id}(\omega) = \omega$ $\forall \omega \in \Omega$.

Das heißt $\boxed{\sum_{\omega \in \Omega} \omega \cdot \mathbb{P}(\omega)}$

Beispiele:

1. $\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\quad P(1) = 0{,}2 \; , P(2) = 0{,}3 \; , P(3) = 0{,}5$

$$Z(i) = i^3 \qquad E(Z) = 0{,}2 \cdot 1^3 + 0{,}3 \cdot 2^3 + 0{,}5 \cdot 3^3 = 16{,}1$$

2. Faire Würfel: $\dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3.5$

Laplace, $|\Omega| = n$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \underline{\underline{\frac{n+1}{2}}}$

3. Bernoulli zum Parmeter p.

Erwartungswert: $p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = \underline{\underline{p}}$

4. Poisson zum parameter λ

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \underbrace{\frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}}_{= P_\lambda(i)} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{= e^{\lambda}} = \underline{\underline{\lambda}}$$

5. Geometrische Verteilung zum Parameter q

Erwartungswert: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot g_q(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1}(1-q) = (1-q) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i\right)'$

$$= (1-q)\left(q \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q^j\right)' = (1-q)\left(\frac{q}{1-q}\right)' =$$

$$= (1-q)\,\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \boxed{\frac{1}{1-q}}$$

Eigenschaften des EW

Satz: Es seien X und $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ reelwertige ZV für die der Erwartungswert definiert lässt, und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann

(i) der EW existiert für $c \cdot X$ und $\mathbb{E}(c \cdot X) = c\,\mathbb{E}(X)$

(ii) der EW existiert für $X+Y$ und $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

(iii) Gilt $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für $\forall \omega \in \Omega$, so ist $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

(iv) $\forall$ Ereignis $E \subseteq \Omega$ gilt: $\mathbb{E}(\chi_E) = \mathbb{P}(E)$

Beweis: (i) $\sum_{\omega \in \Omega} |c X(\omega)| \mathbb{P}(\omega) = |c| \cdot \underbrace{\sum |X(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega)}_{<\infty} < \infty$

$$\mathbb{E}(cX) = \sum_{\omega \in \Omega} c X(\omega) \mathbb{P}(\omega) = c \cdot \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) = c \cdot \mathbb{E}(X)$$

(ii) $$\sum_{\omega \in \Omega} |(X+Y)(\omega)| \mathbb{P}(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} \left(|X(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) + |Y(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) \right) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} |Y(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) < \infty$$

weil beide Summen absolut konvergent sind.

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) + Y(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)$$

weil beide Summen absolut konvergent sind

(iii) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \overset{\text{Für jede Term}}{\leq} \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(Y)$$

(iv) $$\mathbb{E}(\chi_E) = \sum_{c \in \{0,1\}} c \cdot \mathbb{P}_{\chi_E}(c) = 0 \cdot \mathbb{P}_{\chi_E}(0) + 1 \cdot \overset{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}_{\chi_E}(1)} = \underline{\mathbb{P}(E)}$$

Beispiel: Erwartungswert der hypergeometrische Verteilung

Parameters N, n, R $\quad h_{N,n,R}(k) = \dfrac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Wir haben bewiesen die

Behauptung: Es sei $\Omega = [N]^n$, $\mathbb{P}$ gleichverteilung auf Ω,

$Z : \Omega \longrightarrow \{0,1,\dots,n\}$ ZV : $Z((x_1,\dots,x_n)) = \underbrace{\left|\{ i \in [n] : 1 \le x_i \le R\}\right|}_{\text{"Anzahl der ROTE Kugel"}}$

Dann das induzierte W-Maß $\mathbb{P}_Z : \{0,1,\dots,n\} \to [0,1]$ ist hypergeometrisch verteilt

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{n} k\, h_{N,n,R}(k) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{\binom{R}{k}\cdot\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R\binom{R-1}{k-1}\cdot\binom{N-R}{n-k}}{\frac{N}{n}\cdot\binom{N-1}{n-1}}$$

$$\underset{j=k-1}{=} \frac{nR}{N}\cdot \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{R-1}{j}\cdot\binom{N-R}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nR}{N}\sum_{j=0}^{n-1} h_{N-1,n-1,R}(j) = \underline{\underline{\frac{nR}{N}}}$$

Alternativ Weg: $Z = \chi_{E_1} + \dots + \chi_{E_n}$ wobei χ_{E_i} ist die Indikator ZV der Ereignis $E_i := \{x \in \Omega : 1 \le x_i \le R\}$

$Z((x_1,\dots,x_n))$ zählt die "Rote Koordinate" des Tupels,

$\chi_{E_i}((x_1,\dots,x_n))$ zählt EINS wenn die $i$te Koordinate ROT ist.

Linearität des Erwartungswertes $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}(\chi_{E_1}) + \dots + \mathbb{E}(\chi_{E_n})$

$\forall i \in [n]$ gilt: $\mathbb{E}(\chi_{E_i}) \overset{\text{Satz (iv)}}{=} \mathbb{P}(E_i) = \dfrac{|E_i|}{|\Omega|} = \dfrac{R\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \underline{\underline{\dfrac{R}{N}}}$

Anzahl der mögliche $i$te Koordinate

Anzahl der Möglichkeiten für den Rest: $(N-1)^{n-1}$, weil der Wert der $i$te Koordinate verboten ist.

$$\boxed{\text{Also: } \mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R}{N} = \frac{nR}{N}}$$