Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogen)

Winter Semester 2016/17
17 Oktober 2016

Dozent: Prof. Tibor Szabó,
Tutoren: Dennis Chemnitz, Michael Rothgang

Notazionen, Definitionen, Sätze

$\mathbb{N}$: positive ganze Zahlen
$\mathbb{N}_0$: nicht-negative ganze Zahlen

Seien $N, n \in \mathbb{N}_0$ und sei X eine Menge.

- Menge der erste N positive ganze Zahlen. $[N] := \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq N\}$
- Potenzmenge von X: $\mathcal{P}(X) := \{T : T \subseteq X\}$
- Menge der n-elementigen Teilmengen von X. $\binom{X}{n} := \{T : T \subseteq X, |T| = n\}$
- Menge der n-Tupeln von X. $X^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X \forall i \in [n]\}$
- Menge der n-Permutationen von X. $X^{\underline{n}} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$
- Anzahl der n-elementige Teilmenge von $[N]$. $\binom{N}{n} := |\binom{[N]}{n}|$
- Anzahl der n-Permutationen von $[N]$. $N^{\underline{n}} := |[N]^{\underline{n}}|$
- Uhrbilder von einer Zufallsvariable $Z : \Omega \to \Omega'$. Für eine Ereignis $E \subseteq \Omega'$ das Ereignis $\{Z \in E\} := Z^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in E\}$. (und für ein $\omega_1 \in \Omega'$: Ereignis $\{Z = \omega_1\} := Z^{-1}(\omega_1) = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) = \omega_1\}$.

Für die Klausur müssen Sie (1) die Definitionen und Sätze verstehen und auswendig können, (2) die Ideen und Methoden so gut verstehen dass Sie die Beweise der Sätze selbst ausführen können. (Idealerweise lernen Sie die Beweise **nicht** auswendig, sondern sind Sie in der Lage den Satz selbst zu beweisen.) Sie sollten das Material während des Semesters regelmäßig überarbeiten und lernen, andernfalls schaffen Sie alles am Ende nicht.

Definitionen: diskrete W-raum $(\Omega, \mathbb{P})$, Menge der Elementarereignisse, W-Maß, Ereignisse, Erweiterung des W-Maßes auf die Potenzmenge, Laplaceraum, Zufallsvariable, Indikatorzufallsvaraible, Durch eine Zufallsvariable induzierte W-Raum, -Maß, Verteilung einer Zufallsvariable, Bernoulliraum, hypergeometrische Verteilung, Binomialverteilung, Poissonverteilung, geometrische Verteilung, Erwartungswert, Bedingte Wahrscheinlichkeit von Ereignis A unter Ereignis B, Unabhängigket von zwei Ereignisse, von eine Menge von Ereignissen, von eine Menge von Zufallsvariablen, Produktraum, -maßvon endliche viele diskrete W-keitsräume; Dynkin-system, schnitt-stabil Mengensytem, allgemeine Definition einer W-Raum (σ-Algebra, W-Maß, Elementarereignisse, Ereignisse), Borel'sche σ-Algebra, Borelmengen, Verteilungsfunktion, Dichtefunktion, Gleichverteilung, Exponentielverteilung, Normalverteilung, Zufallsvariable (allgemein), durch eine Zufallsvariable induziert W-Raum, Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable, Quantiltransformation, Erwartunswert einer (allgemeiner) Zufallsvariable, Varianz, Streuung, unabhängigkeit einer Menge von Ereignissen, und unabhängigkeit einer Menge von (allgemeiner) Zufallsvariablen, Produkt σ-Algebra, Produktmaß, (diskrete und kontinuierliche) Faltungen, (diskrete und kontinuierliche) gedächtnislose Wartezeiten,

Sätze und Beweise: Summenregel, (Mehrstufige) Produktregel, Bijektionregel, Inklusion-Exklusion, Urnemodelle (Ziehen: ohne/mit Zurücklegen; Ergebnis: Menge/Tupel) Binomialsatz, Model: Anzahl der Anrufe ist Poisson, Model: Erste Erfolg ist geometrisch, Eigenschaften von W-Maßen, durch Zufallsvariable induzierte W-MaßBeispiele (Bernoulli, hypergeometrisch Verteilung, Binomialverteilung), Linearität und Monotonität einer Zufallsvariable, Erwartungswert von X durch $\mathbb{P}_X$, Satz der totalen Wahrscheinlichkeit; Satz von Bayes, Indikatorvariable von unabhängigen Ereignissen sind unabhängig, Satz über die zwei Eigenschaften von Projektionen von Produktmaßen, Binomialverteilung als ein Produktmaß, Erwartungswert der Binomialverteilung, Erwartungswert des Produkts von zwei unabhängige Zufallsvariablen, Beispiele und EIgenschaften von σ-Algebren, Existenz der von $\mathcal{M}$ erzeugten σ-Algebra, Beispiele von Borelmengen und Erzeuger von der Borel'sche σ-Algebra, Eigenschaften von W-Maßen Dirac-Verteilung, Diskrete W-Maßen, Characterizierung von Verteilungsfunktionen, Durch eine Zufallsvariable induzierte W-Maßen, Eigenschaften der Erwartungswert, Varianz, und Covarianz, Markov's und Tschebyshev's Ungleichung, Schwaches Gesetz der großen Zahlen, Characterisierung von (diskrete und kontibuirliche) gedächtnislose Wartezeiten,
Nur die Sätze: Approximation der hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung; Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson Verteilung, Konstruktion einer verrückten Menge in $\{0, 1\}$ (Satz von Vitali), Konstruktion von W-Maßen mit Dichte, stetige Verteilungsfunktionen, stetige und stückweise differenzialbar Verteilungsfunktionen, Unabhängigkeitskriterium wenn die Bild-σ-Algebren von einer schnitt-stabilen Mengensystem erzeugt sind und ihre Folgerungen über diskrete Räume und Räume mit Dichte (ohne Beweis), Faltungen von zwei diskrete ZV, zwei stetige Zufallsvariable mit Dichte,
Nur die Beweisen: Anzahl der *Derangement*en, Identitäten von Binomialkoeffizienten, Erwartungswertbeispiele (nicht existiert, Laplace, Bernoulli, hypergeometrisch, Binomialverteilung, Poisson, geometrisch), Beispiele (Krankheitstest, Türenparadox), Beispiel von einer nicht-unabhängige Menge von Ereignissen die paarweise unabhängig sind, Lemma über die Equivalenz von σ-Algebren und schnitt-stabile Dynkin-systemen, Bertrand-Paradox (rein zufällige Sehne in einem Kreis), rein zufällige Punkt in n-dimensionale Würfel, Unabhängigkeitsbeispiel: Polarkoordinaten eines gleichverteilten Punkt in Einheitskreis, Summe, Maxima, Minima von (diskrete und kontinuirliche) gedächtnislose Wartezeiten,
Mehr Details finden Sie im Skript (auf der Webseite) und weitere Erklärungen im Buch von Behrends und/oder Georgii.