Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogene)

Winter Semester 2016/17
1. Dezemeber 2016

Dozent: Prof. Tibor Szabó,
Tutoren: Dennis Chemnitz, Michael Rothgang

Übungsblatt 7

Alle Lösungen müssen vollständig und nachvollziehbar **BEGRÜNDET** werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden möchten, dann geben Sie es genau an.

Abzugeben bis zum 8. Dezember, 16:00, in den Fächern der Tutoren

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Drei Kästen K_1, K_2, K_3 enthalten gut durchmischt schwarze und weiße Kugeln. K_1 enthält 2 schwarze und 4 weiße, K_2 enthält 3 schwarze und 5 weiße, und K_3 enthält 1 schwarze und 3 weiße Kugeln.

(a) Aus Kasten K_3 wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß, die zweite schwarz, und die dritte wieder weiß ist?

(b) Nun wird zunächst einer der Kästen zufällig ausgewählt (jeder mit Wahrscheinlichkeit 1/3), aus dem dann einmal gezogen wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert das eine weiße Kugel?

(c) Wenn eine Ziehung wie in (b) eine weiße Kugel liefert, mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde dann im ersten Schritt Kasten K_2 gewählt?

In jedem Teil definieren Sie formal die Menge der Elementarereignisse und die relevante Ereignisse, die Sie benutzen.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Eine Ameise steht auf dem Nullpunkt des Gitters $\mathbb{Z}^2$ und bewegt sich einen Gitterpunkt mit jedem Schritt entweder nach rechts oder nach oben mit gleicher Wahrscheinlichkeit, unabhängig von der anderen Schritten. Es gibt einen elektrischen Zaun zwischen den Punkten $(0, 14)$ und $(23, 14)$, sowie zwischen den Punkten $(25, 0)$ und $(25, 12)$; wenn die Ameise auf einen Zaun trifft, stirbt sie. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Ameise überlebt und die Freiheit erreicht?
(Definieren Sie und argumentieren Sie genau für den Wahrscheinlichkeitsraum Sie benutzen. Sie müssen die Zahlen in der Antwort nicht ausrechnen.)

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Ein Kartenstapel mit n Karten enthält 2 Asse. Es wird gemischt (alle Reihenfolgen gleich wahrscheinlich). Die Karten werden aufgedeckt. Sei X die Anzahl der Karten bis das erste Ass erscheint, Y die Anzahl bis die zweite As erscheint. Beweisen Sie, dass $E(X) = \frac{n+1}{3}$ und $E(Y) = \frac{2}{3}(n+1)$.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Betrachten wir folgendes Glückspiel: Zwei Spieler, Zach und Yvonne, werfen je eine Münze. Wenn Zach `Kopf` wirft, zahlt die Bank 2 Euro an die Spieler, aber die Aufteilung hängt von Yvonnes Münze ab. Wenn Yvonne auch `Kopf` geworfen hat, bekommt Sie beide Euros, andernfalls bekommen beide Spieler jeweis 1 Euro. Wenn Zach `Zahl` wirft, zahlt die Bank an die Spieler nichts. Wenn zusätzlich Yvonnes Münze `Kopf` zeigt, bekommt sie 1 Euro von Zach; sonst bekommt niemand etwas. Seien Z und Y der jeweilige Gewinn von Zach, bzw. Yvonne.

(a) Beweisen Sie dass $\mathbb{E}(ZY) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(Y)$.

(b) Sind Z und Y unabhängig?