Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogene)

Winter Semester 2016/17
1. Dezemeber 2016

Dozent: Prof. Tibor Szabó,
Tutoren: Dennis Chemnitz, Michael Rothgang

Übungsblatt 8

Alle Lösungen müssen vollständig und nachvollziehbar **BEGRÜNDET** werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden möchten, dann geben Sie es genau an.

Abzugeben bis zum 15. Dezember, 16:00, in den Fächern der Tutoren

Aufgabe 1 [10 Punkte]
Seien (D1), (D2), (D3), (S), (S1), (S2), (S3) die Eigenschaften einer Mengensystem, wie in der Vorlesung vorgestellt. Beweisen Sie das ein Mengensystem $\mathcal{E}$ auf Ω Eigenschaften (D1), (D2), (D3), und (S) erfüllt genau dann wenn es Eigenschaften (S1), (S2), und (S3) erfüllt.
(*Tipp:* Für eine der Richtungen zeigen Sie erst dass wenn $\mathcal{E}$ Eigenschaften (D1), (D2) (D3) und (S) hat dann für jede $E, F \in \mathcal{E}$ gilt: $E \setminus F \in \mathcal{E}$. Dann schreiben Sie die Vereinigung von einer Folge als eine disjunkte Vereinigung.)

Aufgabe 2 [10 Punkte]
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a W-Raum und $A, B \in \mathcal{E}$ zwei unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie (aus der Definition), dass das Mengensystem

$$\{E \in \mathcal{E} : \text{Menge } \{A, B, E\} \text{ ist unabhängig}\}$$

ein Dynkin-system ist (d.h. es hat Eigenschaften (D1), (D2), (D3)).
(*Bemerkung:* Wir haben den Begriff der Unabhängigkeit noch nicht in allgemeinen W-Räumen definiert, deswegen Sie gerne annehmen können, dass der W-Raum diskret ist. Da die Definition in der allgemeinen Situation dieselbe ist, wird diese Annahme die Lösung nicht beeinflussen.)

Aufgabe 3 [10 Punkte]
Sei $\Omega = [6]$ und $\mathcal{M} = \{\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,5,6\}\}$. Beweisen Sie dass $|\sigma(\mathcal{M})| = 16$.
(*Tipp*: Für eine Menge Ω und eine σ-Algebra $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ auf Ω ein Ereignis $A \in \mathcal{E}$ heißt *Atom*, falls für jedes Ereignis $B \in \mathcal{E}$ mit $B \subseteq A$ entweder $B = A$ oder $B = \emptyset$ gilt. Bestimmen Sie die Atomen von $\mathcal{M}$ und benuzten Sie die $\sigma(\mathcal{M})$ zu bestimmen.

Aufgabe 4 [10 Punkte]
Zeigen Sie, **nur unter Benutzung der Definition von Borelmengen**, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind (Bereits bewiesene Ergebnisse über σ-Algebren dürfen dabei benutzt werden):

(i) die Menge der reele Zahlen die eine ganze Zahl wird, wenn sie genug Mal mit selbst multipliziert wird.

(ii) $(-\infty, 8) \setminus \mathbb{Q}$.

Bonusaufgabe
13 Wichtel bekommen jeweils entweder eine gelbe oder eine blaue Mütze aufgesetzt. Jeder kann die Mützenfarben der anderen sehen, aber nicht die eigene. Nun sollen alle gleichzeitig raten, welche Mütze sie selbst auf haben. Vor dem Experiment können sie sich auf eine Strategie einigen. Während des Experiments ist jegliche Kommunikation verboten. Was ist die **maximale** Anzahl an richtigen Antworten, die sie in jedem Fall (d.h. egal wie die Mützen verteilt werden) erreichen können? (mit Beweis)