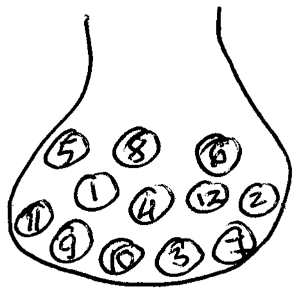
4 Grundlegende Abzählungsprobleme

Urnenmodelle: N numerierte Kugeln

Wir ziehen Kugeln n-mal aus



Varianten:

Ziehen: mit oder ohne Zurücklegen

Ergebnis: geordnet oder ungeordnet

(Das heißt, wollen wir das Endergebnis der n Ziehens als ein Tupel oder als eine Menge betrachten?)

1. $\boxed{\begin{array}{ll}\text{Ziehen:} & \text{mit Zurücklegen} \\ \text{Ergebnis:} & \text{geordnet}\end{array}}$

~~Ergeg~~ Mögliche Ergebnisse sind n-Tupel mit Koordinaten von $[N]$

$$\{(x_1, \dots, x_n) : \forall i \in [n] \quad \underbrace{x_i \in [N]}_{\text{Ergebnis der } i^{\text{te}} \text{ Ziehen}} \} = [N]^n$$

Produktregel $\Rightarrow$ $|[N]^n| = |[N]|^n = \boxed{N^n}$

Beispiel: In einem Staat bestehen Autokennzeichen aus fünf Buchstaben.
Wie viele mögliche gibt es?

Urne $\rightsquigarrow$ $\{A, B, C, D, \dots, X, Y, Z\}$

$N = 26$

$n = 5$ Ziehen $\rightsquigarrow$ Positionen in Autokennzeichen _ _ _ _ _

Was zählen wir ab?

Menge $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{A, B, \dots, X, Y, Z\}\}$

$= \{A, B, \dots, X, Y, Z\}^5$

Produktregel $\Rightarrow$ $|\{A, \dots, Z\}|^5 = 26^5$

(2.)

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ziehen: } \underline{\text{ohne}} \text{ Zurücklegen} \\ \text{Ergebnis: geordnet}\end{array}}$

~~Was~~ Mögliche Ergebnisse sind n-Tupel mit paarweise verschiedenen Koordinaten aus $[N]$

$\boxed{\text{Was ist die Menge die wir abzählen?}}$ n-Permutation

$$[N]^{\underline{n}} := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in [N] \ \forall i \in [n], \quad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j\}$$

$\boxed{\underline{\text{Behauptung}}}$: $\boxed{\left|[N]^{\underline{n}}\right| = \frac{N!}{(N-n)!}}$ $\left(= N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \right)$

Beweis: ~~Was~~ Induktion nach n.

$\underline{n=1}$ $\rightsquigarrow$ $[N]^{\underline{1}} = [N] \Rightarrow \left|[N]^{\underline{1}}\right| = \left|[N]\right| = N = \frac{N!}{(N-1)!}$

$\underline{n>1}$ Klassifizieren wir die Elemente von $[N]^{\underline{n}}$ nach ihren ersten Koordinaten und benutzen wir die Summenregel,

$$S_j := \{(\underset{\overset{\|}{j}}{x_1}, \dots, x_n) \in [N]^{\underline{n}} : x_1 = j\} \Rightarrow [N]^{\underline{n}} = \dot{\bigcup_{j=1}^{N}} S_j$$

Es gibt Bijektion: $S_j \longleftrightarrow ([N] \setminus \{j\})^{\underline{n-1}}$

$$\begin{array}{ccc} S_j & \longleftrightarrow & ([N] \setminus \{j\})^{\underline{n-1}} \\ \cup & & \cup \\ (j, x_2, \dots, x_n) & \longleftrightarrow & (x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

$$\Rightarrow |S_j| = \left|([N] \setminus \{j\})^{\underline{n-1}}\right| = (N-1)^{\underline{n-1}}$$ nach Induktion

Summenregel

$$\Rightarrow \left|N^{\underline{n}}\right| = \left|\dot{\bigcup_{j=1}^{N}} S_j\right| = \sum_{j=1}^{N} |S_j| = N \cdot (N-1)^{\underline{n-1}} = N (N-1) \cdot \dots \cdot (N-1-(n-1)+1)$$

$= N^{\underline{n}}$ ✓

Beispiel: Wahl des Vorstand in einem Verein

Funktionen: Präsident, Vertreter, Schriftführer
Schatzmeister

Mitglieder: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J,

Alle können höchstens EINE Funktion haben.

Kugeln $\rightsquigarrow$ Mitglieder

Ziehen $\rightsquigarrow$ Funktionen

Reihenfolge wichtig ist weil:

das Ergebnis der erste Ziehen ist Präsident

-"- zweite Vertreter

⋮ ⋮

Ohne Zurücklegen: wegen

Was ist die Menge die wir abzählen?

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}^{\underline{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{10!}{6!}}$$

Beispiel: $\boxed{\text{Geburtstagsparadoxon}}$

- Wie wahrscheinlich ist es, dass in unserer Vorlesung Leute mit gleichem Geburtstag sind?

Schwierig direkt zuberechnen. $\boxed{\text{Trick: Gegenteil zurechnen}}$

- Wie wahrscheinlich (ist es) dass es passiert nicht, das heißt JEDER einen verschiedenen Geburtstag hat?

Vereinfachtes Model:

Jeder Tag (außer Feb 29) hat die gleiche $\frac{1}{365}$ Chance.

Es gibt 100 Leute im Campus Management

$\Omega = \{\text{Jan } 1.-31.,\ \text{Feb } 1-28.,\ \text{Mar } 1-31.,\ \ldots\}^{100} = \{(g_1,\ldots,g_i,\ldots,g_{100})\}$

g_i: Geburtstag von i^{te} Student

Laplaceraum auf Ω

ALLE Möglichkeiten: 365^{100}

GÜNSTIGE Möglichkeiten: $\frac{365!}{(365-100)!}$

100 mal ziehen aus der Urne der 365 Tagen,
mit Zurücklegen (ALLE)
und
ohne Zurücklegen (GÜNSTIGE)

W-keit von keine zwei mit gleichen Geburtstag $= \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-r+1)}{365^r} = \prod_{i=0}^{r-1}\left(1 - \frac{1}{365-i}\right)$

Für $r = 100 \rightsquigarrow 0{,}0000005 = 5 \cdot 10^{-7}$

Schon Für $r = 23 \rightsquigarrow \approx 0{,}493 < \frac{1}{2}$

Jan

19.01.
15.01

Feb

13.02.
13.02
04.
20.
10.02

März

15.
10.
18.
12.
01.

Apr

Mai

27.5
09.05

Juni

24.06
15. 6.
14. 6
12. 6
02.06
20. 6.

Juli

25. ~~03~~
30. ~~07~~
18
10.

Aug

25.
9.
29.
3.

Sept

17. 28.
14.
7.
6.
4.

Okt

5.
5.
26.10.

Nov

23.
11.
30.
25.
28.
01.

Dez

26.
23.
31.

3. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Ziehen: } \underline{\text{ohne}} \text{ Zurücklegen} \\ \text{Ergebnis: ungeordnet}\end{array}}$

Mögliche Ergebnisse: n-elementige Teilmengen von $[N]$

Was ist die Menge die wir abzählen?

$$\binom{[N]}{n} := \{T : T \subseteq [N],\ |T| = n\}$$

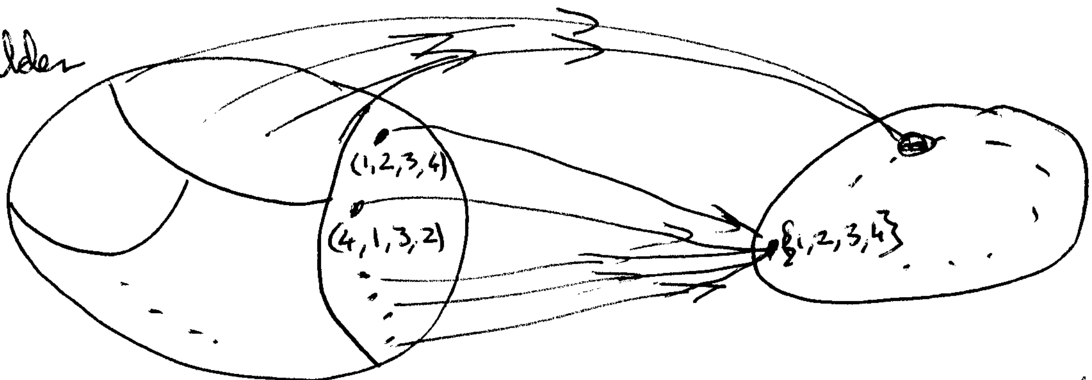
Behauptung: $\left|\binom{[N]}{n}\right| = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ für $N \geq n$.

Erinnern! Wir haben $\binom{N}{n} := \left|\binom{[N]}{n}\right|$ definiert!

Beweis: Definieren wir Funktion

$$\begin{array}{ccc} F: [N]^n & \longrightarrow & \binom{[N]}{n} \\ \Psi & & \Psi \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & \{x_1, \dots, x_n\} \end{array}$$

Urbilder



Für jede $\{x_1, \dots, x_n\} \in \binom{[N]}{n}$ das Urbild $F^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\}) =$

$= \{x_1, \dots, x_n\}^n$ enthält die n-Permutationen von $x_1, \dots, x_n$

Also hat $n!$ Elemente

$$[N]^n = \dot{\bigcup_{\{x_1, \dots, x_n\} \in \binom{[N]}{n}}} F^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\}) \implies \left|[N]^n\right| = \sum_{\{x_1, \dots, x_n\} \in \binom{[N]}{n}} \left|F^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})\right|$$

$$\left|[N]^n\right| = \frac{N!}{(N-n)!}, \qquad \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} n! = \left|\binom{[N]}{n}\right| \cdot n!$$

$$\frac{N!}{(N-n)!\,n!} = \left|\binom{[N]}{n}\right|$$

<u>Beispiel</u>: Wie viele (verschiedene) ausgefüllte Lottozettel gibt es?

Kugeln in Urne: 1, 2, ..., 49

$n=6$ Ziehen von verschiedenen Zahlen (<u>ohne</u> Zurücklegen)

- Ergebnis ist eine <u>Menge</u> (und <u>nicht</u> ein Tupel) weil für uns es ist egal welche Reihenfolge die Gewinnzahlen ~~a~~ vorkommen.

Anzahl der Möglichkeiten

$$\left|\binom{[49]}{6}\right| = \frac{49!}{6!\,43!} \quad (= 13.983.816)$$

(4.) **Ziehen: mit Zurücklegen**
Ergebnis: ungeordnet

Das Ergebnis soll eine Menge sein, aber wir müssen auch erlauben, dass beliebige Elemente MEHR als einmal vorkommen (was in einer einfachen Menge nicht erlaubt ist), ⇝ so-genannte Multimenge

<u>Wie definiert man formal die n-elementige Multimenge von [N]?</u>

- Wir brauchen n Elemente von [N], aber für jedes Element $i \in [N]$, interessieren wir uns für die Anzahl k_i wir haben i ausgewählt.

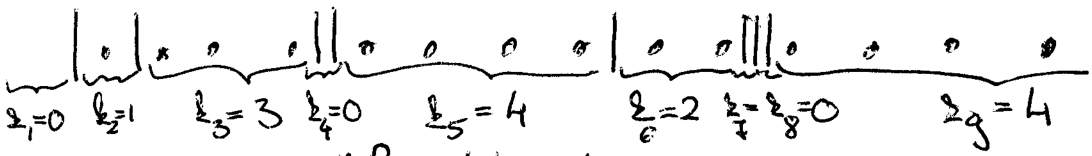
$$\mathrm{Multi}\binom{[N]}{n} := \left\{ (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{N}_0^N : \sum_{i=1}^{N} k_i = n \right\}$$

weil wir brauchen n Elemente

<u>Behauptung</u>: $\left| \mathrm{Multi}\binom{[N]}{n} \right| = \binom{N+n-1}{n}$

<u>Beweis</u>: $\boxed{\text{IDEE:}}$ Stellen wir uns die n Ziehungen als n Punkte in einer Reihe vor. Platzieren wir N−1 Stäbchen zwischen die Punkte, um zu signalisieren von welche bis welche Punkte gehören zu Kugel i.

n=14
N=9



Plätze für n Punkte wählen

(N−1)+n Objekte (n Punkte + N−1 Stäbchen) in (N−1+n) Positionen [illegible]

Formaler Beweis

Sei $F : \mathrm{Multi}\binom{[N]}{n} \longrightarrow \binom{[N+n-1]}{N-1}$

$$(k_1, \dots, k_N) \longmapsto \left\{ \sum_{i=1}^{j} k_i + j \; : \; j = 1, \dots, N-1 \right\}$$

$$\boxed{F \text{ ist eine Bijektion zwischen } \mathrm{Multi}\binom{[N]}{n} \text{ und } \binom{[N+n-1]}{N-1}}$$

(i) $F(k_1, \dots, k_N)$ ist in $\binom{[N+n-1]}{N-1}$: • $j < j' \Rightarrow \sum_{i=1}^{j} k_i + j < \sum_{i=1}^{j'} k_i + j'$

$\Longrightarrow F(k_1, \dots, k_N)$ hat $N-1$ Elementen

• das größte Element von $F(k_1, \dots, k_N)$ ist $\sum_{i=1}^{N-1} k_i + N - 1 \leq \underline{\underline{n + N - 1}}$

(ii) F ist Injektion: sei $(k_1, \dots, k_N) \neq (l_1, \dots, l_N) \in \mathrm{Multi}\binom{[N]}{n}$

Sei j der kleinste Index mit $k_j \neq l_j$. Sei $k_j < l_j$.

Dann $\sum_{i=1}^{j} k_i + j$ ist in $F(k_1, \dots, k_N)$ aber NICHT in $F(l_1, \dots, l_N)$

$$\dots < \sum_{i=1}^{j-1} k_i + j - 1 < \sum_{i=1}^{j} k_i + j < \sum_{i=1}^{j} l_i + j < \sum_{i=1}^{j+1} l_i + j + 1 < \dots < \sum_{i=1}^{N-1} l_i + N - 1$$

$$\sum_{i=1}^{1} l_i + 1 < \dots < \sum_{i=1}^{j-1} l_i + j - 1$$

$$= F(l_1, \dots, l_N)$$

So $F(k_1, \dots, k_N) \neq F(l_1, \dots, l_N)$

(iii) F ist eine Surjektion. Sei $M \in \binom{[N+n-1]}{N-1}$

Sei $m_1, \dots, m_{N-1}$ die Elemente von M in steigender Reihenfolge

Also: $1 \le m_1 < \dots < m_{N-1} \le N+n-1$

Definieren wir $k_1 := m_1 - 1$

$\forall i=2,\dots,N-1 \quad k_i := m_i - m_{i-1} - 1$

$k_N := N+n-1-m_{N-1}$

(i) $(k_1, \dots, k_N) \in \text{Multi}\binom{[N]}{n}$

- $k_i \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$
- $\sum_{i=1}^{N} k_i = m_1 - 1 + \sum_{i=2}^{N-1}(m_i - m_{i-1} - 1) + N+n-1-m_{N-1}$

$= -1 - (N-2) + N + n - 1 = n$

(ii) $F(k_1, \dots, k_N) = M$

$j=1: \sum_{i=1}^{1} k_i + 1 = k_1 + 1 = m_1$

$N-1 \ge j \ge 2 \quad \sum_{i=1}^{j} k_i + j = m_1 - 1 + \sum_{i=2}^{j} (m_i - m_{i-1} - 1) + j = m_j - j + j = m_j$

Es gibt eine Bijektion zwischen $\text{Multi}\binom{[N]}{n}$ und $\binom{[N+n-1]}{N-1}$

$\Rightarrow \left|\text{Multi}\binom{[N]}{n}\right| = \left|\binom{[N+n-1]}{N-1}\right| = \binom{N+n-1}{N-1}$

Beispiel (Bose - Einstein Verteilung)

Wie viele Weg gibt es n nicht unterschiedbar Teilchen in N verschiedenen (gleichartig aber unterscheidbar) "Fächern" zu platzieren?

Orts und Impulsraum in endliche viele Zellen zerlegt ist. Wie viele Zustand diese System haben kann?

Kugeln $\leadsto$ Fächern

Ziehen $\leadsto$ Teilchen

~ ungeordnet, ~~W~~weil es ist egal in welchem Reihenfolgen die Teilchen zu ihren Zellen gehen; nur die Endposition ist wichtig

~ mit Zurücklegen, weil ein Fach mehr als einmal vorkommen kann

Wir interessieren uns nur in der Anzahl k_i der Teilchen in Fach i $(\forall i)$

$$\left| \left\{ (k_1, \ldots, k_N) : \sum_{i=1}^{N} k_i = n \right\} \right| = ?$$