<u>Erinnerung</u>: geometrisch Verteilung zum Parameter q : $g_q(k) := q^{k-1}(1-q)$

$\boxed{\text{z.B.}}$ $g_{\frac{18}{37}}(k)$ representierte die W-keit, dass das erste Rot in der k^{ten} Roulellerunde auftritt.

- Wie haben wir das berechnet?

In Laplaceraum $\boxed{\{0,1,\dots,36\}^k}$, $\frac{\text{"günstige"}}{\text{"alle"}} = \frac{19^{k-1}\cdot 18}{37^k} = \left(\frac{19}{37}\right)^{k-1}\cdot\frac{18}{37}$

Noch einfacher: $g_{\frac{1}{2}}(k) = \frac{1}{2^{k-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^k}$ representierte die W-keit, dass der erste Kopf im k-ten Wurf auftritt (wenn wir eine faire Münze werfen)

Berechnung: W-keit von $(Z,Z,\dots,Z,K)$ im Laplaceraum auf $\boxed{\{K,Z\}^k}$ ist $\frac{\text{"günstige"}}{\text{"alle"}} = \frac{1}{2^k}$

$\boxed{\text{INKONSISTENZ}}$

$\boxed{\text{Für verschiede } k,\ g_q(k) \text{ wurde in verschiedenen W-Räumen berechnet.}}$

Lösung? $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} : \omega_i \in \{0,1\}\ \forall i\in\mathbb{N}\}$ "enthält" alle die Räume $\{0,1\}^k$, $\forall k\in\mathbb{N}$

Probleme: (i) bisher haben wir nur höchstens abzählbare Ω erlaubt und $\boxed{\{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ ist überabzählbar}}$

(Beweis: wenn nicht, sei $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots$ eine Liste von alle Elemente von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Aber die Sequenz α, $\alpha_i := 1-\omega_i^{(i)}\ \forall i\in\mathbb{N}$, ist NICHT auf dieser Liste. ↯ (weil $\forall i,\ \alpha \neq \omega^{(i)}$))

(ii) wir natürlich möchten, dass "KEINE Sequez $\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bervorzugt wird"

Aber Laplaceraum existiert NUR auf endliche Ω !!!

Also: Wegen (ii), $\forall$ sinnvolle $\mathbb{P}$, sollte $\mathbb{P}(\omega)$ gleich 0 $\forall \omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Aber trotzdem ihre disjunkte Vereinigung $\biguplus_{\omega \in \Omega} \{\omega\} = \Omega$ muß W-keit $\underline{1}$ haben.

(D.h.: Jedes spezifische Elementarereignis mit W-keit 0 auftritt, aber doch passiert etwas. Das ist **KEIN** Widerspruch, weil wir eine überabzählbare Vereinigung betrachten.)

Noch allgemeiner, sind wir offenbar an der W-keit vieler anderer Ereignisse interessiert, die auch überabzählbar sein könnten. Z.B.: wir wollen das $\mathbb{P}(\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_i = 1\}) = \frac{1}{2}$, d.h. die W-keit, dass die i-te Koordinate 1 ist, ist $\frac{1}{2}$.

Also: W-Maß im diskreten Sinne (d.h. Definition der W-keit eines Ereignisses NUR durch die W-keiten der darin enthaltenen Elementarereignisse) macht in diesem überabzählbaren Fall nicht zu viel Sinn.

$\boxed{\text{Ziel}}$: W-Maß $\mathbb{P}$, das auf den Teilmengen von Ω definiert ist (nicht nur auf den Elementen) D.h. wir brauchen eine sinnvolle Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$.

Was für eine Eigenschaften soll $\mathbb{P}$ haben?

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ [sinnvoll: W-keit von sicherem Ereignis soll 1 sein.]
- $\forall E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$, die paarweise disjunkt sind ($E_i \cap E_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$) gilt: $\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

  (sinnvoll; z.B. die W-keit das eine ganzzahlwertige ZV X mindestens 10 ist soll gleich $\sum_{i=10}^{\infty} \mathbb{P}(X=i)$ sein.)
- statt Laplace Eigenschaft (was unmöglich auf unendliche Ω) wir versuchen die "unabhängigkeit" der Koordinaten benutzen:

Es sei $\ddot{A}_i : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Abbildund, die ändert die i-te Koordinate: $\ddot{A}_i(\omega) := (\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, 1-\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots)$

Wegen "unabhängigkeit", $\forall E \subseteq \Omega$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(E)$ soll gleich $\mathbb{P}(\ddot{A}_i(E))$

Es <u>geht</u> <u>NICHT</u>!! Es sei $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

<u>Satz:</u> (Vitali) Es gibt KEINE Abbildung $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ mit den Eigenschaften: (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

(iii) $\forall\, E \subseteq \Omega$ und $\forall\, i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\ddot{A}_i(E)) = \mathbb{P}(E)$$

<u>Beweis:</u> Nehmen wir an, dass solche $\mathbb{P}$ existiert.

Konstruieren wir eine "verrückte Teilmenge" $M \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

<u>Schritt 1:</u> Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \Omega$

Es sei $\omega \sim \omega'$ wenn $|\{i \in \mathbb{N} : \omega_i \neq \omega'_i\}| < \infty$

(d.h. Anzahl der unterschiedlichen Koordinaten ist ENDLICH)

<u>Schritt 2:</u> Äquivalenzklassen: $[\omega]_\sim := \{\alpha \in \Omega : \alpha \sim \omega\} =$

$$= \{\alpha \in \Omega : |\{i \in \mathbb{N} : \alpha_i \neq \omega_i\}| < \infty\}$$

<u>Beispiele:</u>

(*) $[(0,0,\ldots,0,\ldots)]_\sim = [(1,0,\ldots,0,\ldots)]_\sim =$ Menge der Sequenzen mit endlich vielen 1.

(*) $[(0,0,\ldots,0,\ldots)]_\sim \neq [(1,1,\ldots,1,\ldots)]_\sim$

(*) $[(0,0,\ldots,0,\ldots)]_\sim \neq [(0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots)]_\sim$

(*) $\forall \omega \in \Omega$ $\boxed{[\omega]_\sim \text{ ist abzählbar}}$, weil die Anzahl der <u>endlichen Teilmengen</u> von $\mathbb{N}$ ist <u>abzählbar</u>

(Es ist die Vereinigung von abzählbar viele abzählbare Menge: $\bigcup_{k=0}^{\infty} \binom{\mathbb{N}}{k}$

Schritt 3, Wählen wir genau ein (beliebige) Element von JEDER Äquivalenzklasse und tun wir das in Menge M rein. (Auswahlaxiom!!!)

Also: $\forall \omega \in \Omega \quad |M \cap [\omega]_\sim| = 1$

Was soll $\mathbb{P}(M)$ sein?

$\forall$ endliche $S \subseteq \mathbb{N}$, sei $\ddot{A}_S(M) := \ddot{A}_{s_1}(\ddot{A}_{s_2}(\dots \ddot{A}_{s_\ell}(M)\dots))$
$S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$

(d.h.: die Menge der Elementen $\omega \in \Omega$, die sich von einem Element von M genau in den Koordinaten $s_1, \dots, s_\ell$ unterscheiden)

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\ddot{A}_S(M)) = \mathbb{P}(M)}$,

Dann gilt: $\boxed{\Omega = \biguplus_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S| < \infty}} \ddot{A}_S(M)}$ (Vereinigung von abzählbar viele paarweise disjunkte Menge)

Warum? $\boxed{\subseteq}$ Sei $\omega \in \Omega$. Wir haben auch von $[\omega]_\sim$ ein Element in M reingetan: sagen wir $m \in [\omega]_\sim \cap M$.
Dann m und ω unterscheiden sich in eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ von Koordinaten.
$\Rightarrow \omega \in \ddot{A}_S(m) \subseteq \ddot{A}_S(M)$ ✓

$\boxed{\forall S, S' \subseteq \mathbb{N},\ |S|, |S'| < \infty,\ S \neq S' \quad \ddot{A}_S(M) \cap \ddot{A}_{S'}(M) = \emptyset}$: Sei $\omega \in \ddot{A}_S(M) \cap \ddot{A}_{S'}(M)$

$\Rightarrow \exists\, m \neq m' \in M$ s.d. $\ddot{A}_S(m) = \omega = \ddot{A}_{S'}(m')$

$\Rightarrow \ddot{A}_{(S \setminus S') \cup (S' \setminus S)}(m) = m' \Rightarrow m \sim m'$ weil $(S \setminus S') \cup (S' \setminus S)$ endlich ist

$\Rightarrow$ ↯ weil M hat nur ein Element in jeder Äquivalenzklasse

$$\Rightarrow \underline{\underline{1}} = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\biguplus_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S| < \infty}} \ddot{A}_S(M)\Big) = \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S| < \infty}} \mathbb{P}(\ddot{A}_S(M)) = \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S| < \infty}} \mathbb{P}(M) = \underline{\underline{\begin{cases} 0 & \text{wenn } \mathbb{P}(M) = 0 \\ +\infty & \text{wenn } \mathbb{P}(M) > 0 \end{cases}}} \ ↯$$

Also: Es ist NICHT möglich, dass wir die W-keit JEDER Teilmenge von $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vernünftig und konsistent messen können.

Seien wir realistisch: Wollen wir wirklich die W-keit für JEDE Teilmenge von Ω messen? Auch z.B. für die obige verrückte Menge M?

NEIN! Einige Teilmengen, wie die Teilmenge M, sind einfach zu künstlich, um in der Praxis angetroffen zu werden.

Auf der anderen Seite gibt es wichtige Teilmengen, z.B. die "rechteckige Zylindermengen" $\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_i = 1\}$ in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, für die wir unbedingt eine Wahrscheilichkeit definieren wollen.

Welche Teilmengen halten wir für wichtig?

Dies hängt von den jeweiligen Ω. Die Wahl, was in das Mengensystem $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von "wichtigen" Teilmengen gesetzt wird, ist in der Regel ganz klar.

z.B. für $\boxed{\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$, nehmen wir $\boxed{\mathcal{W} = \left\{\{\omega \in \Omega : \omega_i = x\} : \begin{matrix} i \in \mathbb{N} \\ x \in \{0,1\} \end{matrix}\right\}}$

für $\boxed{\Omega = \mathbb{R}}$ (R ist ein anderes natürliches überabzählbares Elementarereignismenge; z.B. unsere Telefonwartezeit beispiel oder jede ähnliche Situation, wir etwas warten und die Zeit kontinuierlich gemessen wird.)

Wir würden unbedingt die W-keit von abgeschlossenen Intervallen messen.

In diesem Fall wählen wir $\boxed{\mathcal{W} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}}$

Wir können versuchen, andere Teilmengen zu identifizieren die für uns wichtig sind (sagen wir, die Teilmengen von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Sequenzen mit zwei, drei, oder zehn spezifischen festen Koordinaten enthalten (statt nur eine feste Koordinate), oder die offene Intervalle oder halb-offene Intervalle von $\mathbb{R}$) aber die Liste der "natürlichen" Optionen scheint endlos.
Es wäre mehr befriedigend, eine "begriffliche" Auflösung zu finden, um die scheinbar endlose Zugabe neuer und neuerer "wichtiger" Teilmengen zu beenden.

Die Forderung, dass unsere "messbare" Ereignisse unter den einfachsten logischen Operationen ("und", "oder", Negation) geschlossen werden sollten, ist ein sehr natürlicher Wunsch. Denken Sie darüber nach: Wenn wir zulassen, die W-keit der Ereignisse E und $F \subseteq \Omega$ zu messen, wie "unnatürlich" wäre es, wenn es nicht erlaubt ist, über die W-keit den Ereignissen

- "E <u>und</u> F auftreten" $\rightsquigarrow$ Ereignis $E \cap F$
- "E oder F auftritt" $\rightsquigarrow$ Ereignis $E \cup F$
- "E tritt nicht auf" $\rightsquigarrow$ Ereignis $\Omega \setminus E =: \bar{E}$

zu sprechen. <u>Also</u>: zulassen wir $E \cap F$, $E \cup F$, und $\bar{E}$.

<u>Auch</u>: wenn $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ eine disjunkte Folge von Ereignissen ist und die W-keit von $\forall E_i$ ist möglich zu messen (d.h. E_i ist zulässig für $\forall i = 1, 2, \ldots$) dann wollen wir auch die W-keit der disjunkten Vereinigung zu messen (d.h. $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i$ zulassen) (Dies ist auch sinnvoll, da wir uns bereits überzeugt haben, daß wir wollen $\mathbb{P}(\dot{\bigcup} E_i) = \sum^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$.)

Also:

Für unsere allgemeinere Definition von W-Raum, die auch auf eine überabzählbare Ω funktioniert, brauchen wir
• eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von "messbare" Teilmengen von Ω mit Eigenschaften (D1) $\Omega \in \mathcal{E}$

(D2) $\forall E \in \mathcal{E}$ gilt: $\Omega \setminus E \in \mathcal{E}$

(D3) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ gilt: $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$

(S) $\forall E, F \in \mathcal{E}$ gilt: $E \cap F \in \mathcal{E}$

(Bemerkung: • Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit Eigenschaften (D1), (D2), D(3) heißt Dynkin-system

• Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit Eigenschaft (S) heißt schnitt-stabil.)

Und brauchen wir
• eine Abbildung $\mathbb{P}: \mathcal{E} \to [0,1]$ mit Eigenschaften (P1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(P2) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$
$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

Bemerkung: • Eigenschaft (P2) heißt die σ-additivität von $\mathbb{P}$.

• $\mathbb{P}$ mit Eigenschaften (P1) und (P2) heißt ein $\boxed{\text{Wahrscheinlichkeitsmaß}}$ auf $\mathcal{E}$.

Es ist möglich, die vier Eigenschaften unseres Wunschmengensystem $((O1),(O2),(O3),(S))$ mit nur drei auszudrücken (die aber equivalent sind).
Dies ist, was wir als unsere Definition wählen.

Def: Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt eine <u>σ-Algebra</u> auf Ω wenn folgende drei Eigenschaften hat:

(S1) $\Omega \in \mathcal{E}$

(S2) $\forall E \in \mathcal{E}$ gilt: $\Omega \setminus E \in \mathcal{E}$

(S3) $\forall$ Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ gilt: $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$

Lemma: Es sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem auf Menge Ω.
Dann, $\mathcal{E}$ ist ein schnitt-stabil Dynkin-system $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}$ ist eine σ-Algebra

Beweis: Hausaufgabe

Def: Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ heißt ein <u>W-Raum</u> wenn

(W1) $\Omega \neq \emptyset$ ist eine Menge

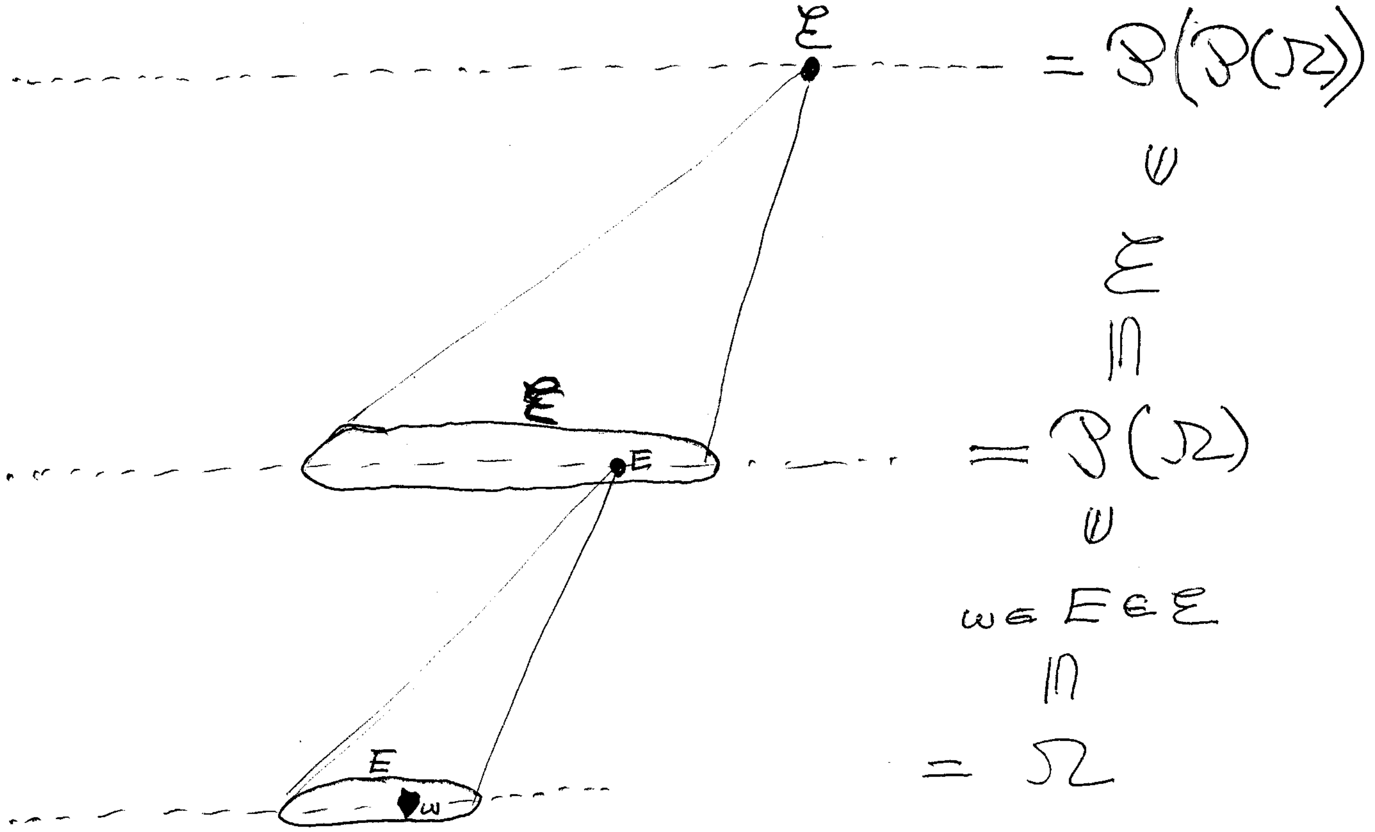
(W2) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra auf Ω

(W3) $\mathbb{P} : \mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$ ist ein W-Maß auf $\mathcal{E}$

- Elemente von Ω heißen <u>Elementarereignisse</u>
- Elemente von $\mathcal{E}$ heißen <u>Ereignissen</u>
- Diese sind die <u>Axioman von Kolmogoroff</u>

Bild über σ-Algebren

Drei "Ebene" von Mengen



Beispiele: für σ-Algebren auf Ω

1. $\{\emptyset, \Omega\}$ (die "kleinste" σ-Algebra auf Ω)
2. $\mathcal{P}(\Omega)$ (die "größte" σ-Algebra auf Ω)
3. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$
4. $\mathcal{E} = \{ A \subseteq \Omega :$ $|A|$ oder $\Omega \setminus A$ ist höchstens abzählbar
5. $\Omega = \bigcup_{i \in I} D_i$ wobei $\forall i,j \in I$ $i \neq j$ $D_i \cap D_j = \emptyset$ (und $\forall i \in I$ $D_i \neq \emptyset$)

   (d.h. $(D_i)_{i \in I}$ ist eine Partition von Ω)

   wenn $\mathcal{J}$ eine σ-Algebra auf I, dann $\{\bigcup_{i \in J} D_i : J \in \mathcal{J}\}$ eine σ-Algebra auf Ω ist.

Einfache Eigenschaften von σ-Algebren

Satz: Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω.

Dann gilt:

(a) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(b) $\forall E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ gilt: $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E}$

(c) $\forall E_1, E_2, \dots, \dots \in \mathcal{E}$ gilt: $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E} \quad \forall n$

und $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$

(d) $\forall E, F \in \mathcal{E}$ gilt: $E \setminus F \in \mathcal{E}$

Beweis: $\boxed{\text{HA}}$

Lemma: (Equivalenz von σ-Algebren und schnitt-stabile Dynkin-systeme)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengensystem auf Ω.

Dann gilt: $\mathcal{E}$ hat Eigenschaften (D1) (D2) (D3) (S) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}$ hat Eigenschaften (S1) (S2) (S3)

Beweis: $\boxed{\text{HA}}$

Nachdem wir unsere "wichtige Teilmengen" identifiziert haben, Mengensystem $\mathcal{W}$, benötigen wir eine σ-Algebra die $\mathcal{W}$ enthält.

Natürlich ist $\mathcal{P}(\Omega)$ immer eine σ-Algebra, aber wir haben schon gesehen, dass es manchmal "zu groß" sein könnte.

<u>Also</u>, nehmen wir die "kleinste" σ-Algebra die $\mathcal{W}$ enthält.

<u>Satz</u>: Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem auf Ω.

Dann $\exists!$ Mengensystem $\sigma(\mathcal{M})$ mit folgenden Eigenschaften

(E1) $\sigma(\mathcal{M}) \supseteq \mathcal{M}$

(E2) $\sigma(\mathcal{M})$ ist eine σ-Algebra auf Ω

(E3) $\forall$ σ-Algebra $\mathcal{M}'$ $^{\text{auf } \Omega}$, $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$, gilt: $\mathcal{M}' \supseteq \sigma(\mathcal{M})$

$\sigma(\mathcal{M})$ ist die von $\mathcal{M}$ erzeugten σ-Algebra.

<u>Beweis</u>: Definieren wir $\boxed{\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega}} \mathcal{N}}$

(E1) $\forall \mathcal{N}$ von der Schitt enthält $\mathcal{M}$, $\Rightarrow$ auch ihre Schnitt enthält $\mathcal{M}$.

(E2) (S1) für $\sigma(\mathcal{M})$: $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt $\Omega \in \mathcal{N} \Rightarrow \bigcap \mathcal{N} \ni \Omega$

(S2) für $\sigma(\mathcal{M})$: $\forall E \in \sigma(\mathcal{M}) = \bigcap \mathcal{N} \Rightarrow E \in \mathcal{N}$ $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt

~~aber~~ $\forall$ solche $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra ist $\Rightarrow \Omega \setminus E \in \mathcal{N}$ für $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt $\Rightarrow \Omega \setminus E \in \bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$

(S3) für $\sigma(\mathcal{M})$: $\forall E_1, E_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{M}) = \bigcap \mathcal{N} \Rightarrow E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{N}$ für $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt. Aber $\forall$ solche $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra ist $\overset{S(3)}{\Longrightarrow}$ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{N}$ für $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$

(E3) Wenn $\mathcal{M}'$ σ-Algebra auf Ω ist und $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$, dann $\mathcal{M}'$ ein Mitglied der Schnitt $\bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$ ist $\Rightarrow \mathcal{M}' \supseteq \bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$ $\square$

Bemerkung: Wie kann mann die Elemente von $\sigma(\mathcal{W})$ vorstellen / konstruiren?

- alle höchstens abzählbare Vereinigung / Durchschnitt aus der Mengen $\{M, \Omega\setminus M : M \in \mathcal{W}\}$ in $\sigma(\mathcal{W})$ sein soll. $\rightsquigarrow$ Mengensystem $\mathcal{A}_1(\mathcal{W})$

Für einige $\mathcal{W}$ ist dies noch nicht alles...

- alle höchstens abzählbare Vereinigung / Durchschnitt aus der Mengen $\{M, \Omega\setminus M : M \in \mathcal{A}_1(\mathcal{W})\}$ auch in $\sigma(\mathcal{W})$ sein soll. $\rightsquigarrow$ Mengensystem $\mathcal{A}_2(\mathcal{W})$

Und noch nicht alles... $\mathcal{A}_3(\mathcal{W})$, $\mathcal{A}_4(\mathcal{W})$, -----

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(\mathcal{W})$ ist auch noch nicht genug manchmal

(kann sein, z.B., dass mit $M_i \in \mathcal{A}_i(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{A}_{i-1}(\mathcal{W})$ die Vereinigung $\bigcup M_i \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(\mathcal{W})$.)

[Mann muss $\sigma(\mathcal{W}) = \mathcal{A}_\omega(\mathcal{W})$ wobei ω die kleinste überabzählbare Ordinalzahl bezeichnet...

und $\mathcal{A}_\alpha(\mathcal{W}) = \mathcal{A}\left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta(\mathcal{W})\right)$ $\forall \alpha > 1$]

Bemerkung: $\mathcal{B}$ enthält praktisch alle vorkommenden Mengen aber nicht alle! Die verrückte Menge M aus Vitali's Satz ist nicht Borel.

Borel'sche σ-Algebra

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Wir wählen $\mathcal{I}_{ab} = \{[a,b] \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\}$

Die erzeugte σ-Algebra $\underline{\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}_{ab})}$ ist die <u>Borel'sche σ-Algebra</u> auf $\mathbb{R}$.

Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen <u>Borelmengen</u>

<u>Satz:</u> Die folgende Mengen sind Borel-mengen:

(i) $(-\infty, c]$ $\quad \forall c \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall$ offene und $\forall$ abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$.

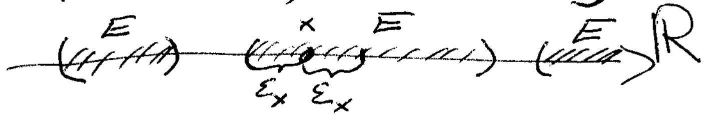
<u>Beweis:</u> (i) $(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, c]$

Da $\forall$ $[-n, c]$ ein abgeschlossenes Intervall ist, ist ihre (abzählbare) Vereinigung in der von $\mathcal{I}_{ab}$ erzeugten σ-Algebra (d.h. in $\mathcal{B}$) erhalten.

(ii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge.

$\forall x \in E$ sei $\varepsilon_x = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R} : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq E\}$

Da E offen ist, gilt: $\varepsilon_x > 0$.

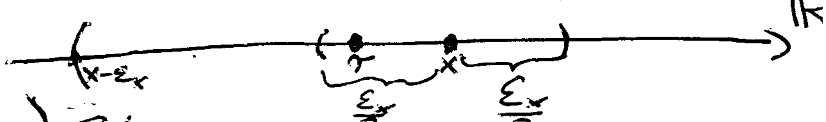


Dann $E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap E} [q - \frac{\varepsilon_q}{2}, q + \frac{\varepsilon_q}{2}]$

$\boxed{\supseteq}$ Per Def. von ε_q: $[q - \frac{\varepsilon_q}{2}, q + \frac{\varepsilon_q}{2}] \subseteq (q - \varepsilon_q, q + \varepsilon_q) \subseteq E$

$\boxed{\subseteq}$ Sei $x \in E$ beliebig. $\exists\, r \in \mathbb{Q} \cap (x - \frac{\varepsilon_x}{3}, x + \frac{\varepsilon_x}{3}) \subseteq E$

Dann $\varepsilon_r > \frac{2}{3}\varepsilon_x$



weil $(r - \frac{2}{3}\varepsilon_x, r - \frac{2}{3}\varepsilon_x) \subseteq (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq E$

Dann $x \in (r - \frac{\varepsilon_x}{3}, r + \frac{\varepsilon_x}{3}) \subseteq [r - \frac{\varepsilon_r}{2}, r + \frac{\varepsilon_r}{2}]$

Damit: E ist eine (abzählbare) Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, deswegen muß E auch in der von $\mathcal{I}_{ab}$ erzeugten σ-Algebra enthalten sein

$\Rightarrow$ E ist eine Borel-menge.

Wenn $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene Menge ist:

$\Rightarrow \overline{C} = \mathbb{R} \setminus C$ eine offene Menge ist $\Rightarrow \overline{C} \in \mathcal{B}$

Da $\mathcal{B}$ σ-Algebra ist, $\overline{\overline{C}} = C \in \mathcal{B}$. $\square$

Satz: (Einen alternativen Erzeuger)

$$\mathcal{B} = \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}), \text{ wobei } {}_{\infty}\mathcal{I}_{ab} := \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$$

Beweis: $\boxed{\supseteq}$ (i) $\Rightarrow {}_{\infty}\mathcal{I}_{ab} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}) \subseteq \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$

weil $\mathcal{B}$ selbst die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{B}$ enthält

$\boxed{\subseteq}$ sei $[a,b] \in \mathcal{I}_{ab}$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall.

$$[a,b] = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{(-\infty, a-\tfrac{1}{n}]}\right) \cap (-\infty, b]$$

$\overline{(-\infty, a-\frac{1}{n}]} = (a-\frac{1}{n}, \infty) \in \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$ weil es das Komplement eines Elements von ${}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}$.

Dann $[a,b]$ ist der Schnitt von abzählbar vielen Elementen von $\sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$ und daber ist $[a,b]$ auch in $\sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$ enthalten.

$$\Rightarrow \mathcal{I}_{ab} \subseteq \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}) \Rightarrow \underbrace{\sigma(\mathcal{I}_{ab})}_{= \mathcal{B}} \subseteq \sigma(\sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})) = \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$$

$\square$

W-keits theorie in der Ebene, im 3D-Raum, ...

$n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\Omega = \mathbb{R}^n}$

Dann $\mathcal{I}_{ab}^n = \left\{ \times_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n : a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$ ist die Mengensystem aller achsenparallelen abgeschlossenen Quader in $\mathbb{R}^n$

$\underline{\mathcal{B}^n} := \sigma(\mathcal{I}_{ab})$ ist die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$

- $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}$

W-keits theorie in $[0,1]$, in $[0,\infty)$, in "schöne" Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Sei $\overset{\neq \emptyset}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige.

Dann $\mathcal{B}^n_\Omega := \{ \Omega \cap B : B \in \mathcal{B}^n \}$ ist die Borel'sche σ-Algebra auf Ω.

Produkt-σ-Algebra Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge

Seien $(\Omega_i, \mathcal{E}_i)$ Ereignisräume, $\forall i \in I$,

(d.h., Ω_i ist eine Menge, $\mathcal{E}_i$ ist eine σ-Algebra auf Ω_i)

Sei $\boxed{\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i} = \{(e_i)_{i\in I} : e_i \in \Omega_i\}$

das kartesische Produkt von den Ω_i.

- Die Produkt σ-Algebra $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i$ auf Ω ist die von $\mathcal{W} = \{\mathrm{Proj}_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{E}_i\}$ erzeugten σ-Algebra: $\boxed{\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E} := \sigma(\mathcal{W})}$. (wobei $\mathrm{Proj}_i : \Omega \to \Omega_i$, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathrm{Proj}_i(\omega) := \omega_i$)

Bemerkung: "Wichtige" Teilmengen: Wenn $A \in \mathcal{E}_i$, d.h., wir werden die W-keit von A messen können, wollen wir auch die Wkeit von $\mathrm{Proj}_i^{-1}(A) = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A \times \Omega_{i+1} \times \dots \subseteq \Omega$

messen.

Spezialfall: $\Omega_i = E$ und $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}$ $\forall i \in I$

$\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i = \underline{E^I}$ und $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i = \underline{\mathcal{E}^{\otimes I}}$ ← Notation

Beispiele: ① $I = \mathbb{N}$ $\Omega_i = \{0,1\}$, $\mathcal{E}_i = \mathcal{P}(\{0,1\})$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

In $\{0,1\}^{\otimes \mathbb{N}}$ findet man alle "Rechteckzylindern":

$\forall J \subseteq I$
$\forall \alpha_j \in \{0,1\}, j \in J$, $\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_j = \alpha_j \ \forall j \in J\} = \bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_j^{-1}(\alpha_j)$

ist der Schnitt von abzählbar vielen Mengen von $\mathcal{W}$.

② $I = [n]$ $\Omega_i = \mathbb{R}$ $\mathcal{E}_i = \mathcal{B}$, $\forall i \in [n]$,

$\boxed{\text{HA:}}$ $\mathcal{B}^{\otimes n} = \mathcal{B}^n$ (d.h., das n-maliges Produkt der eindimensionalen Borel'sche σ-Algebra ist gleich

W-Maßen

Erinnerung: Sei • $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge

• $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω

Eine Funktion $\boxed{\mathbb{P}: \mathcal{E} \to [0,1]}$ mit Eigenschaften

(P1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(P2) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

heißt ein W-Maß (oder Verteilung) auf den Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{E})$.

Das Tripel $\boxed{(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})}$ heißt dann ein W-Raum

Beispiel:

$\boxed{\text{Dirac-Verteilung}}$ $(\Omega, \mathcal{E})$ beliebiger Ereignisraum

Sei $a \in \Omega$. Definieren wir $\delta_a : \mathcal{E} \to [0,1]$ wie folgt:

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

δ_a ist ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{E})$.

(P1) $\delta_a(\Omega) = 1$ weil $a \in \Omega$

(P2) Sei $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ eine disjunkte Folge

• wenn $\nexists\, i \in \mathbb{N}$ mit $a \in E_i \Rightarrow a \notin \bigcup E_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup E_i) = 0 = \sum 0 = \sum \mathbb{P}(E_i)$

• wenn $\exists\, j \in \mathbb{N}$ mit $a \in E_j$, dann gibt es genau eins solches E_j, weil die E_i sind paarweise disjunkt.

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup E_i) = 1 = 1+0+0+\dots = \sum \mathbb{P}(E_i)$

Beispiel: $\boxed{\text{Diskrete W-Maßen}}$

Satz: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum. Dann gilt $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ von Mengen: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

Beweis:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup E_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in E_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

Jedes $\omega \in \bigcup E_i$ ist in genau eins E_i enthalten (weil die E_i paarweise disjunkt sind), daher klassifizieren wir die Summe nach die E_i.
Solche umordnung ist "legal", da die Folge $\sum_{\omega \in \bigcup E_i} \mathbb{P}(\omega)$ absolute konvergent ist. (weil $\sum_{\omega \in \bigcup E_i} \mathbb{P}(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1 < \infty$)

Korollar: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum. Dann ist das Tupel $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein W-Raum.

Beweis: (P1) $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \underset{\uparrow}{=} 1$

Def eines diskreten W-Raum

(P2) obige Satz.

Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein W-Raum. Dann gilt

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (d.h., das unmögliche Ereignis hat W-keit 0.)

(b) $\forall E, F \in \mathcal{E}$ gilt: $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

(Additivität) Insbesondere, wenn auch $E \cap F = \emptyset$, dann $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$.

(c) (Monotonität) $\forall E, F \in \mathcal{E}$, $E \subseteq F$, gilt: $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

(d) $\forall E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{E}$ gilt: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$
(σ-Subadditivität)

(e) $\forall E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{E}$, mit $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$,

(Stetigkeit von unten) gilt: $\mathbb{P}(E_n) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ für $n \to \infty$.

(f) $\forall E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{E}$, mit $E_1 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$,

(Stetigkeit von oben) gilt: $\mathbb{P}(E_n) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$ für $n \to \infty$.

Beweis:

(a) $\emptyset, \emptyset, \dots \in \mathcal{E}$ ist eine disjunkte Folge $\overset{(P2)}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots \Longrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(b) Fall 1. $E \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow E, F, \emptyset, \emptyset, \dots \in \mathcal{E}$ ist eine disjunkte Folge $\overset{(P2)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup F \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$

Fall 2. $E, F \in \mathcal{E}$ beliebig

$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup (F \setminus E)) \underset{\text{Fall 1.}}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E) \underset{\text{Fall 1.}}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\underbrace{(F \cap E) \cup (F \setminus E)}_{= F}) - \mathbb{P}(F \cap E)$

(c) $E \subseteq F \Rightarrow F = E \cup (F \setminus E) \overset{(b)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E) \geq \mathbb{P}(E)$

(d) Sei $F_n \underset{n \geq 2}{:=} E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \in \mathcal{E}$, $F_1 := E_1$. Dann F_n eine disjunkte Folge ist und $\forall n \in \mathbb{N}: F_n \subseteq E_n$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} F_i \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} F_i) \overset{(P2)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) \overset{(c)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

(e) Sei $F_n \underset{n \geq 2}{:=} E_n \setminus E_{n-1} \in \mathcal{E}$, $F_1 := E_1$. Dann F_n eine disjunkte Folge ist und $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} F_i \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} F_i) \overset{(P2)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) =$

$= \lim_{n \to \infty} [\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2 \setminus E_1) + \dots + \mathbb{P}(E_n \setminus E_{n-1})] =$

$\overset{(b)}{=} \lim [\mathbb{P}(E_1) + (\mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1)) + \dots + (\mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n-1}))] = \lim \mathbb{P}(E_n)$

(f)

$$E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots \Rightarrow \overline{E}_1 \subseteq \ldots \subseteq \overline{E}_n \subseteq \ldots$$

$$\overset{(e)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{E}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{E}_i\right) \underset{\text{DeMorgan}}{=} \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{E}_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \mathbb{P}(E_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)}}$$

In unseren beiden grundlegenden Beispielen ($\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$) haben wir bereits von sinnvolle "wichtige" Teilmengen erzeugten σ-Algebren definiert.

Wie konstruiert man das W-Maßen wir wollen auf $\sigma(\mathcal{W})$?

Schritt 1.: Definieren wir die W-keit $\mathbb{P}^*: \mathcal{W} \to [0,1]$ der "wichtigen" Mengen, wie wir sie wollen (d.h., wie sie unsere Intuition der Situation repräsentiere

Schritt 2.: Erweitern wir $\mathbb{P}^*$ auf die erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{W})$.

Ein schwieriger Satz der Maßtheorie sagt, dies möglich ist, wenn wir mit der Wahl von $\mathcal{W}$ und $\mathbb{P}^*$ vorsichtig waren.

(ohne Beweis)

Satz von Carathéodory (Erweiterungssatz)

Wenn (i) $\mathcal{M}$ ein Halbring auf Ω ist und (ii) $\mu^*: \mathcal{M} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ ein Prämaß ist, dann gibt es eine Maß $\mu: \sigma(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ sodass $\forall M \in \mathcal{M}: \mu(M) = \mu^*(M)$

(i) Was ist ein Halbring? (von Mengen; nichts mit dem algebraischen Begriff zu tun.)

- $\emptyset \in \mathcal{M}$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}$ gilt: $A \cap B \in \mathcal{M}$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}$ $\exists$ paarweise disjunkt $C_1, \dots, C_k$ s.d.: $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$

z.B.
- $\mathcal{I}_{ab} = \{(a,b] \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}$ ist ein Halbring auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}_{ab})$ (Hausaufgabe)
- $\mathcal{W} = \left\{ \bigcap_{j \in J} \mathrm{Proj}_j^{-1}(A_j) : J \subseteq I, |J| < \infty, A_j \in \mathcal{E}_j \right\}$ ist ein Halbring auf $\bigtimes_{i \in I} \Omega_i$

(ii) Was ist ein Prämaß?

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$, gilt: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

Unterschied zu Maß: $\mathcal{M}$ ist nicht unbedingt eine σ-Algebra z.B. $\mu^*: {}_o\mathcal{I}_{ab} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$\mu^*([c,d)) := d-c$, $\forall c \leq d$, ist ein Prämaß.

Seine Erweiterung ist das sogenannte Lebesgue Maß λ

Da die erzeugte σ-Algebra $\sigma({}_o\mathcal{I}_{ab}) = \mathcal{B}$, (HA!)

definiert λ ein vernünftiges und konsistent Maß

für alle Borel-mengen: $\lambda: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$.

- $\lambda([c,d)) = \mu^*([c,d)) = d-c$, $\forall c<d$, und auch
- λ hat alle schöne Eigenschaften eines Maßes.

---

z.B. $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

Halbring: $\mathcal{W} = \left\{ \bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_{j}^{-1}(\alpha_j) : J \subseteq \mathbb{N}, |J|<\infty, \alpha_j \in \{0,1\} \, \forall j\in J \right\}$

$\sigma(\mathcal{W}) = \sigma(\{\mathrm{Proj}_{j}^{-1}(\alpha) : j \in \mathbb{N}, \alpha \in \{0,1\}\})$

Wir möchten das für $\forall J \subseteq \mathbb{N}, |J|<\infty, \forall \alpha_j \in \{0,1\}, j\in J$

- $\mu^*\left(\bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_{j}^{-1}(\alpha_j)\right) = \dfrac{1}{2^{|J|}}$

μ^* ist ein Prämaß.

Seine Erweiterung auf $\sigma(\mathcal{W})$ hat alle schöne Eigenschaften wir wollten:

- "Richtige" ("Gleichverteilte") W-keit für jede Rechteckzylinder $\bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_{j}^{-1}(\alpha_j)$: W-keit hängt NUR von der Größe von J (und nicht welche J und nicht welche α_j)
- "Unabhängigkeit" von Koordinaten