FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
STOCHASTIK 1 (LEHRAMTSBEZOGEN)

WINTER SEMESTER 2017/18
26. OKTOBER 2017

DOZENT: SHAGNIK DAS

TUTOR: TIM DITTMANN

# *Übungsblatt 2*

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 16:00 am Donnerstag, 2. November, im Fach des Tutors.

**Aufgabe 1** [10 Punkte]

Wir verallgemeinern das Schach-Beispiel von der Vorlesung. Jetzt gibt es $2n$ Schachspieler, die auf $n$ Schachbrettern spielen möchten, wobei $n$ eine natürliche Zahl ist.

(a) Wie in der Vorlesung, nehmen Sie an, dass weder die Zuordnung von Paar Spielern nach Schachbrettern noch wer mit Weiß spielt wichtig sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, um diese $2n$ Schachspieler zu zweit zu unterteilen?

(b) In dieser Situation mit $2n$ Spieler, lösen Sie die drei anderen Probleme.[1] Beschreiben Sie genau die Mengen, die Sie zählen.

**Aufgabe 2** [10 Punkte]

Das vereinigte Königreich möchte die die europäische Union verlassen, und deshalb muss es die anderen 27 Länder der europäische Union €27.000.000.000 bezahlen. Weil das vereinigte Königreich ein bisschen gehässig ist, wird es diesen Betrag mit €1 Münzen bezahlen.

Danach müssen die 27 Länder diese 27 Milliarden Münzen unterteilen. Sie haben entschieden, dass es nur fair ist, die Verteilung der Münzen zufällig auszuwählen. Zusätzlich soll jede mögliche Verteilung die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Zum Beispiel, die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland alle 27 Milliarden Münzen erhält, und die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Land eine Milliarde erhält, sind gleich.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Land kein Geld vom vereinigten Königreich enthält? Wie immer, müssen Sie die Antwort nicht ausrechnen, aber Sie müssen den Wahrscheinlichkeitsraum genau beschreiben.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt02.html.]

[1] Die drei Probleme: wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn:

(i) die Zuordnung wichtig ist und Weiß/Schwarz nicht wichtig ist?

(ii) die Zuordnung nicht wichtig ist und Weiß/Schwarz wichtig ist?

(iii) die Zuordnung und Weiß/Schwarz wichtig sind?

**Aufgabe 3** [10 Punkte]

Hier werden Sie ein paar binomische Identitäten beweisen.

(a) Es ist aus der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ klar, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Geben Sie einen bijektiven Beweis dieser Aussage. Das bedeutet, Sie eine Bijektion von $A$ nach $B$ erzeugen müssen, wobei $A$ eine Menge mit $\binom{n}{k}$ Elemente ist und $B$ eine Menge mit $\binom{n}{n-k}$ Elemente ist.

(b) Sei $n$ eine natürliche Zähl. Wie viele Teilmengen von $[n]$ hat eine gerade Größe?

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt02.html.]

**Aufgabe 4** [10 Punkte]

Wenn $X$ eine Menge ist, sei $\text{Multi}\binom{X}{k}$ die Menge der Multimengen von $X$, die $k$ Elemente enthält. Wir haben schon bewiesen, dass $\left|\text{Multi}\binom{[n]}{k}\right| = \binom{n+k-1}{k}$. Jetzt werden Sie einen zweiten Beweis dieser Aussage geben.

Erzeugen Sie eine Bijektion von der Menge $\text{Multi}\binom{[n]}{k}$ nach der Menge $\binom{[n+k-1]}{k}$, und dann leiten Sie die Aussage ab.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt02.html.]