Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik | Winter Semester 2017/18
Stochastik 1 (lehramtsbezogen) | 9. November 2017

Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittmann, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

Übungsblatt 4

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 10:00 am Montag, 20. November, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Als wir unser Geburtstagsexperiment durchgeführt haben, haben wir herausgefunden, dass es zehn Paare von den 85 Studierenden mit demselben Geburtstag gibt. Aber es gibt kein Tripel von Studierenden mit demselben Geburtstag gibt. Sollten wir überrascht sein oder nicht?

(a) Sei n eine natürliche Zahl und k eine nicht negative Zahl, sodass $n \geq 2k$. Wie viele n-Tupel von Geburtstagen gibt es, wobei es genau k Paare mit demselben Geburtstagen und kein Tripel mit demselben Geburtstag gibt?

[Hinweis: `http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt04.html`.]

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tripel von n Studierenden gibt, das denselben Geburtstag hat?

(c) Was ist das kleinste n, sodass die Wahrscheinlichkeit von (b) kleiner als 50% ist?[1]

Wie immer werden wir annehmen, dass die 29. Februar nicht existiert und jeder Geburtstag die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Jeder weiß, dass 42 die beste Zahl ist.[2] Wie viele natürliche Zahlen in $\{1, 2, \ldots, 2017\}$ sind mit 42 teilerfremd[3]?

Aufgabe 3 [10 Punkte]

In der Vorlesung haben wir den Inklusion–Exklusion–Satz, der die Größe einer Vereinigung von Mengen gibt, besprochen. Damit können wir die Wahrscheinlichkeit von einer Vereinigung von Ereignisse in einem Laplaceraum berrechnen. Aber der Inklusion–Exklusion–Satz ist in der folgenden[4] Form auch gültig. Beweisen Sie diesen allgemeineren Satz.

[1] Wir empfehlen die Anwendung eines Computers!

[2] Ich hoffe, dass Sie den Klassiker "Per Anhalter durch die Galaxis" schon gelesen haben. Falls nicht, lesen Sie ihn sofort!

[3] Zwei natürliche Zahlen sind teilerfremd, wenn Eins die eindeutige natürliche Zahl ist, die beide Zahlen teilt.

[4] Blättern Sie bitte um.

Satz. Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $E_1, E_2, \ldots, E_n$ Ereignisse in diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right).$$

Achtung! Hier ist $(\Omega, \mathbb{P})$ ein beliebiger diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, nicht unbedingt ein Laplaceraum.

[Hinweis: `http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt04.html`.]

Aufgabe 4 [10 Punkte]

(a) Seien n, m und k natürliche Zahlen. Beweisen Sie die folgende Formel:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n-m}{k-i} = \binom{n}{k}.$$

(b) Erinnern Sie sich, dass die n-te Zeile des pascalschen Dreiecks die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ enthält. Was ist die Summe von den Quadraten der Binomialkoeffizienten von dieser Zeile? Das heißt, was ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$?

Berechnen Sie die Summen von den ersten vier oder fünf Zeilen, um eine Vermutung zu formulieren. Danach wenden Sie die Formel von (a) an, um Ihre Vermutung zu beweisen.

[Hinweis: `http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt04.html`.]