Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogen)

Winter Semester 2017/18
16. November 2017

Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittmann, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

Übungsblatt 5

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 10:00 am Montag, 27. November, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Zwei Gene kontrollieren die Augenfarbe einer Person. Es gibt zwei Arten von diesen Genen: blau und rot. Wenn jemand zwei blaue Gene hat, sind die Augen dieser Person blau. Sonst sind sie rot.[1]

Eine Person erbt ihre Gene von ihren Eltern. Wenn jemand ein Kind hat, gibt er seinem Kind eine Kopie eines seiner Gene. Das kopierte Gen wird zufällig ausgewählt. Das andere Gen des Kindes kommt von dem anderen Elternteil.

Es gibt ein Paar, wobei beide ein blaues Gen und ein rotes Gen haben. Sie möchten vier Kinder in ihrer Familie haben. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Kinder davon blaue Augen haben werden?

Aufgabe 2 [10 Punkte]

In dieser Aufgabe werden Sie beweisen, dass die hypergeometrische Verteilung und die Binomialverteilung ähnlich sind, wenn N und R viel größer als n sind. Bitte beweisen Sie den folgenden Satz.

> **Satz.** Seien n und k natürliche Zahlen, sodass $n \geq k$, und sei $p \in (0,1)$ eine reelle Zahl. Seien $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen von natürlichen Zahlen, sodass:
>
> (i) $\lim_{i\to\infty} N_i = \infty$, und
>
> (ii) $\lim_{i\to\infty} \frac{R_i}{N_i} = p$.
>
> Dann gilt
>
> $$\lim_{i\to\infty} h_{N_i,n,R_i}(k) = b_{n,p}(k).$$
>
> [Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt05.html.]

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Der Modalwert einer Verteilung $(\Omega, \mathbb{P})$ ist der Wert $k \in \Omega$ mit der höchsten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(k)$. Beweisen Sie die Aussagen auf der nächsten Seite.

[1] Vielleicht ist das nicht ganz wahr, aber in der Mathematik werden blau und rot sehr oft benutzt. Und wenn die Mathematik schön ist, braucht man noch etwas?

(a) Der Modalwert der hypergeometrischen Verteilung $(\Omega, h_{N,n,R})$ ist $\left\lfloor \frac{(n+1)(R+1)}{N+2} \right\rfloor$.

(b) Der Modalwert der Binomialverteilung $(\Omega, b_{n,p})$ ist $\lfloor (n+1)p \rfloor$. Wenn $(n+1)p$ eine ganze Zahl ist, ist $\lfloor (n+1)p \rfloor - 1$ auch ein Modalwert.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt05.html.]

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Cristiano, Marcelo und Sergio sind drei Freunde, die 3,00€ haben. Sie haben sich dafür entschieden, dass sie mit diesem Geld zwei Lottoscheine kaufen werden.[2] Aber danach kommt ein Problem: welche Zahlen sollen sie auswählen? Sie haben die folgenden Tipps vorgeschlagen.[6]

	1. Lottoschein	2. Lottoschein
Cristiano	$\{5, 7, 17, 27, 37, 47\}$	$\{5, 7, 17, 27, 37, 47\}$
Marcelo	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{44, 45, 46, 47, 48, 49\}$
Sergio	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

Sie werden Geld gewinnen, wenn ein Lottoschein mindestens vier richtige Zahlen hat. Berechnen Sie für jedes Paar Lottoscheine die Wahrscheinlichkeit Geld zu gewinnen und vergleichen Sie sie. Wer hat die besten Chancen Geld zu gewinnen?

---

[2] Diese Freunde spielen Fußball für Real Madrid.[3] Im Jahr 2017 haben sie die UEFA Champions League zum dritten Mal in vier Jahren gewonnen. Dafür haben sie ein bisschen zusätzliches Geld bekommen. Aber leider insgesamt nur 3,00€,[4] also können sie nur zwei Lottoscheine erschwingen.

[3] Der Real Madrid Club de Fútbol ist eine Fußballmannschaft, die selbstverständlich aus Madrid kommt. Manche sagen, dass Real Madrid die beste Fußballmannschaft der Welt ist. Sie haben Recht.

[4] Florentino Pérez, der Präsident des Clubs, muss sein Geld sparen, um den nächsten Galactico[5] zu kaufen.

[5] Ein Galactico ist ein sehr bekannter und teurer Fußballspieler.

[6] „Also“, sagte Sergio, „jetzt müssen wir unsere Zahlen auswählen.“

„Ooh“, sagte Cristiano, „ich möchte die Sieben sechsmal auswählen. Sieben ist meine Lieblingszahl.“[7]

Sergio hat geantwortet, „Das ist nicht möglich. Du musst eine *Teilmenge* von sechs Zahlen auswählen, keine Multimenge.“

„Ach so! Jetzt ist alles klar.“Danach hat Cristiano eine Minute nachgedacht. „Dann will ich alle Zahlen, die Sieben enthalten. Sieben, Siebzehn, Siebenundzwanzig, Siebenunddreizig, Siebenundvierzig und Siebenundfünfzig.“

„Lieber Cristiano“, sagte ein genervter Sergio, „Siebenundfüngzig liegt nicht in [49]. Wähle eine andere Zahl aus.“

„Fünf, dann, weil im Dezember werde ich meinen fünften Ballon d'Or Preis gewinnen.“

„Sehr gut. Du hast $\{5, 7, 17, 27, 37, 47\}$ für den ersten Lottoschein ausgewählt. Was möchtest du für den zweiten?“Sergio hat gehofft, dass diese Entscheidung schneller gemacht wird.

„Die selben Zahlen, natürlich.“, erklärte Cristiano, „Sie sind meine Glückszahlen.“

Endlich hat Marcelo gesprochen. „Dummkopf, du musst den zweiten Lottoschein nicht verschwenden! Ich schlage vor, dass wir $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ für den ersten Lottoschein auswählen. Aber wenn die richtigen Zahlen nicht klein sind, müssen sie groß sein. Deshalb sollten wir $\{44, 45, 46, 47, 48, 49\}$ für den zweiten Lottoschein auswählen.“

Sergio antwortete daraufhin, „Gute Idee, Marcelo! Aber für den zweiten Lottoschein, schlage ich vor, dass wir Primzahlen auswählen. Schließlich sind wir eine prima Mannschaft!“

[7] Kein Witz.