Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittmann, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

Übungsblatt 6

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 10:00 am Montag, 4. Dezember, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Jeden Tag stellt Volkswagen 27473 Autos her. Idealerweise wird die Firma jedes Auto prüfen, aber sie hat keine Zeit dafür. Stattdessen wählt Volkswagen zufällig 100 von den 27473 Autos aus und prüft nur diese Autos. Sei E das Ereignis, dass die Stichprobe mindestens drei defekte Autos enthält.

(a) Nehmen Sie an, dass es insgesamt 75 defekte Autos gibt. Was ist die Verteilung[1] der Anzahl der defekten Autos in der Stichprobe? Was ist $\mathbb{P}(E)$?

(b) Wie groß kann die Anzahl der defekten Autos sein, sodass $\mathbb{P}(E) \leq 0,01$?

Sie können einen Statistik-Rechner hier finden.[2]

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Es gibt einen Kurs mit 85 Studierende. Wir interessieren uns für die Anzahl der Studierenden, die am 22. September geboren wurden. Wie immer nehmen wir an, dass die Geburtstage gleichmäßig verteilt sind.[3]

(a) Welche Verteilung[1] zählt diese Studierende?

(b) In unserem Kurs wurden zwei von den 85 Studierenden am 22. September geboren. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit davon.

(c) Approximieren Sie die Antwort von (b) mit der entsprechenden Poisson-Verteilung. Wie gut ist die Approximation?

[1] Sie sollten die Parameter auch geben.

[2] Das „probability mass“ ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = x)$. Das „lower cumulative“ ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq x)$. Das „upper cumulative“ ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq x)$.

[3] In der Wirklichkeit passt die Gleichverteilung nicht so gut. Auf der Nordhalbkugel sind Geburtstage im September und Oktober wahrscheinlicher als in anderen Monaten.[4] Aber die Gleichverteilung gibt ein schönes Modell, das besser für die Hausaufgabe ist.

[4] Vielleicht ist das so, weil im Winter es kalt ist. Deshalb müssen Paare drinnen bleiben, und sie haben nichts zu tun.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Die jährliche Anzahl der falschen Urteile eines Richters wird mit der Poisson-Verteilung modelliert.

(a) Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass er keine falschen Urteile spricht, $0,9$ ist. Was ist der Wert des Parameters λ?

(b) Der Richter muss sich zur Ruhe setzen, wenn er in einem Jahr fünf oder mehr falsche Urteile spricht. Was ist die Wahrscheinlichkeit davon? Benutzen Sie hier den Parameter λ von (a).

(c) Welche Verteilung[1] beschreibt die Länge seiner Karriere, bevor er sich zur Ruhe setzen muss?

Aufgabe 4 [10 Punkte]

(a) Wie immer spielen wir „Rot“ im Roulette. Aber jetzt möchten wir wissen, wie oft wir spielen müssen, bis zum *dritten* Gewinn. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit davon, dass unser k-tes Spiel der dritte Gewinn ist, wobei $k \in \mathbb{N}$.

(b) Jetzt bedenken Sie die allgemeinere Situation: es gibt ein Experiment, wobei die Wahrscheinlichkeit vom Erfolg p ist. Wir wiederholen das Experiment bis zum r-ten Erfolg. Wir möchten wissen, wie oft wir es wiederholen müssen.

Hier ist natürlich[5] die Menge der Elementarereignisse $\Omega = \mathbb{N}$. Definieren Sie das entsprechende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{N}$, sodass $\mathbb{P}(k)$ die Wahrscheinlichkeit davon ist, dass das k-te Experiment der r-te Erfolg ist.

[5] Mein erstes deutsches Wortspiel!