Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogen)

Winter Semester 2017/18
30. November 2017

Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittmann, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

Übungsblatt 7

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 10:00 am Montag, 11. Dezember, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Sei $X : [n]^{\underline{n}} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ die Zufallsvariable auf dem Laplaceraum $([n]^{\underline{n}}, \mathbb{P})$, die die Fixpunkte von Permutationen zählt. Formell gesagt: $X(\pi) = |\{i \in [n] : \pi(i) = i\}|$ für jede Permutation $\pi \in [n]^{\underline{n}}$.
Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt07.html.]

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Jeden Tag vor dem Frühstück spielt Max Mustermann Roulette. Er sucht einen gelungenen Anfang in den Tag, deshalb spielt er bis zum ersten Sieg. Per Tradition spielt er immer „Rot“. In seinem Casino, wenn man w€ auf „Rot“ verwettet und gewinnt, bekommt er $2w$€. Und wenn er verliert, bekommt er nichts.
Max weiß, dass normalerweise er im Mittel verlieren wird. Aber er hat eine kluge Strategie. Am Anfang, verwettet er 1€. Und nach jedem verloren Spiel, verdoppelt er die Wette des nächsten Spiels. Nach dem ersten gewonnen Spiel, nimmt Max seinen Gewinn[1] und geht er nach Hause.
Zum Beispiel, nehmen Sie an, dass sein drittes Spiel seinen ersten Sieg ist. Dann würde er 1€ im ersten Spiel verwetten und nichts gewinnen, 2€ im zweiten Spiel verwetten und nichts gewinnen, und 4€ im dritten Spiel verwetten und endlich 8€ gewinnen. Sein Gewinn ist in diesem Fall 8€$-(1 + 2 + 4)$€ $= 1$€.

(a) Erzeugen Sie eine Zufallsvariable, die der Gewinn von Max zählt. Was ist der zugrundliegende Wahrscheinlichkeitsraum?

(b) Was ist der Erwartungswert von der Zufallsvariable in (a)? Was ist ihre Varianz?

(c) Ist die Strategie von Max eine gute Strategie? Warum oder warum nicht?

[1] Sein Gewinn ist das Geld er gewonnen hat minus das Geld er insgesamt verwettet hat.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

(a) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Nehmen Sie an, dass $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(X^2)$ existieren. Beweisen Sie die folgende Formel:

$$\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X).$$

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Poisson-Verteilung zum Parameter λ.[2]

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der geometrischen Verteilung zum Parameter q.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt07.html.]

Aufgabe 4 [10 Punkte]

(a) Für jede $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, erzeugen Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine Zufallsvariable darauf, deren Erwartungswert μ ist und Varianz σ^2 ist.

(b) Für jede $\mu \in \mathbb{R}$, erzeugen Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine Zufallsvariable darauf, deren Erwartungswert μ ist und Varianz nicht existiert.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt07.html.]

[2] Hier ist die Zufallsvariable die identische Abbildung auf (Ω, p_λ).