Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogen)

Winter Semester 2017/18
8. Dezember 2017

Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittmann, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

Übungsblatt 8

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 10:00 am Montag, 18. Dezember, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

(a) Sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung der Bernoulliraum zum Parameter p ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$.

(b) Sei Y eine Zufallsvariable, deren Verteilung die Binomialverteilung zu den Parametern n und p ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{V}(Y) = np(1-p)$.

Aufgabe 2 [10 Punkte]
Seien $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B ist gegeben durch $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Zwei Ereignisse A und B sind *unabhängig* genau dann, wenn $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

(a) Die Menge $\Omega = [47]$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Zeigen Sie, dass wenn Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ unabhängig sind, dann ist eine der beiden Mengen entweder leer oder Ω.

(b) Zeigen Sie, dass die analoge Behauptung mit 48 statt 47 falsch ist.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

(a) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reellwertige nichtnegative Zufallsvariable, deren Erwartungswert existiert. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt08.html.]

(b) Ist die folgende Ungleichung wahr, wenn die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auch negative Werte annimmt? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{|\mathbb{E}(X)|}{a}.$$

Aufgabe 4 [10 Punkte]

(a) Sei X eine Zufallsvariable, deren Varianz existiert, und sei $t > 0$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}.$$

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt08.html.]

(b) Sei S eine Menge, die 10.000 Elemente enthält. Eine Teilmenge $T \subseteq S$ wird von allen Teilmengen von S zufällig ausgewählt. Sei $X = |T|$. Was ist die Verteilung dieser Zufallsvariable?

(c) Zeigen Sie, dass die Größen von mehr als neunundneunzig Prozent aller Teilmengen von S im Intervall $[4.500, 5.500]$ liegen.