

DOZENT: SHAGNIK DAS
TUTOREN: TIM DITTMANN, FELIX HENNEKE, GUSNADI WIYOGA

Übungsblatt 9: Eine Weihnachtsgeschichte

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 10:00 am Montag, 15. Januar, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Einige Leute denken, dass der Weihnachtsmann nur im Dezember arbeitet, aber leider¹ ist das nicht so. Im Dezember ist er besonders beschäftigt, weil er viele Geschenke einpacken und ausliefern muss, aber von Januar bis November hat der Weihnachtsmann auch viel zu tun.

Es gibt fast zwei Milliarden Kinder² in dieser überbevölkerten Welt, und der Weihnachtsmann muss jedes Kind beobachten und beurteilen. Zum Glück ist das Beobachten der Kinder einfach, weil der Weihnachtsmann am Nordpol wohnt und von oben alles sehen kann.³

Aus Erfahrung schätzt der Weihnachtsmann, dass 75% aller Kinder gut sind. Aber leider ist es schwierig, einzelne Kinder zu beurteilen.⁴ Deshalb hat der Weihnachtsmann eine Roboterelfe entwickelt, die Kinder gut beurteilen kann. Wenn die Roboterelfe ein gutes Kind überprüft, sagt sie mit Wahrscheinlichkeit 97%, dass das Kind gut ist. Und wenn sie ein schlechtes Kind überprüft, entdeckt sie die Schlechtheit des Kindes mit Wahrscheinlichkeit 98%.

- (a) Die Roboterelfe hat gesagt, dass ein Kind schlecht ist. Was ist die Fehlerwahrscheinlichkeit (das heißt, was ist die Wahrscheinlichkeit davon, dass das Kind in Wirklichkeit gut ist)?

Es ist sehr wichtig, dass das Urteil sehr genau ist.⁵ Deshalb hat der Weihnachtsmann entschieden, dass die Roboterelfe jedes Kind zweimal überprüfen soll.⁶ Nehmen Sie an, dass die zwei Untersuchungen unabhängig voneinander sind.

- (b) Wenn die zwei Untersuchungen zeigen, dass ein Kind schlecht ist, was ist jetzt die Fehlerwahrscheinlichkeit?

¹Das ist schade für den Weihnachtsmann, aber günstig für uns.

²Wir definieren ein „Kind“ als eine Person, deren Alter kleiner als 15 ist, weil ich die entsprechenden Daten [hier](#) gefunden habe.

³In unseren Tagen ist es noch einfacher, weil der Weihnachtsmann Snapchat gehackt hat.

⁴Nehmen Sie zum Beispiel an, dass ein Kind seine Schokolade mit seinen Freunden geteilt hat. Natürlich wird man sagen, dass das Kind sehr gut ist. Aber wenn die Freunde RB-Leipzig-Fans wären, wäre das Teilen eine schlechte Handlung. Die Moral ist gar nicht einfach!

⁵Warum sollten Kinder versuchen, gut zu sein, wenn ein böses Kind ein Geschenk bekommt oder ein engelhaftes Kind kein Geschenk bekommt?

⁶Es wird [so gesungen](#).

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Aber jetzt hat der Weihnachtsmann ein neues Problem. Was wird er tun, wenn die zwei Ergebnisse der Untersuchungen nicht übereinstimmen? Er denkt sehr lang über das Problem nach, und schließlich hat er am 3. Juni die Lösung gefunden. In diesen Fällen verdient das Kind eine zweite Chance.

Der Weihnachtsmann bereitet drei Pakete vor. Ein Paket enthält ein Real-Madrid-Trikot, und die zwei anderen Pakete enthalten Fischköpfe,⁷ aber von außen sehen die Pakete identisch aus. Dann sagt der Weihnachtsmann, „Liebes oder schreckliches Kind, ich weiß nicht, ob du gut bist oder nicht. Deshalb biete ich dir eine Chance an, um ein gutes Geschenk zu bekommen. Ein Paket enthält ein wunderschönes Trikot der besten Fußballmannschaft der Welt, und die andere enthalten Fischköpfe. Du musst ein Paket von diesen drei auswählen, und es wird dein Geschenk sein. Viel Glück!“

Das Kind wählt zufällig⁸ ein Paket aus. Aber dann ist es nur Zufall, ob das Kind das Trikot bekommt oder nicht. Der Weihnachtsmann wollte, dass das Kind eine sinnvolle Entscheidung treffen kann.

Deshalb öffnet er eines der beiden nicht ausgewählten Pakete, das Fischköpfe enthält,⁹ und wirft dieses Paket weg. Dann sagt er, „Kind, jetzt gibt es nur noch zwei Pakete: das Paket, das du ausgewählt hast, und dieses andere Paket. Ein Paket enthält das Real-Madrid-Trikot und das andere enthält mehr Fischköpfe. Möchtest du dein Paket tauschen, oder wirst du dein Paket behalten?“

Beraten Sie das Kind. Welches Paket sollte das Kind nehmen? Was ist die Erfolgswahrscheinlichkeit, wenn das Kind die Pakete tauscht? Beschreiben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum genau und zeigen Sie, dass es besser wäre, wenn das Kind die Pakete tauschen würde.

Aufgabe 3

[10 Punkte]

Vielleicht verstehen Sie jetzt, dass der Weihnachtsmann wirklich sehr beschäftigt ist. Und er hat noch mehr Arbeit! Nachdem er entschieden hat, wer Geschenke verdient hat, muss er weiter entscheiden, welche Geschenke er liefert. Um diese Entscheidung zu erleichtern, schreiben einige Kinder dem Weihnachtsmann Briefe, in denen sie ihre gewünschten Geschenke auflisten.¹⁰ Ein interessanter Brief kommt von Kylian aus Monaco.

Lieber Weihnachtsmann,

dieses Jahr war ich wie immer ein gutes Kind. Ich habe meine Hausaufgabe immer pünktlich abgegeben, und ich habe das Gemüse, das meine Mutter gekocht hat, meistens gegessen. Deshalb glaube

⁷Obwohl Fischköpfe **ein paar Vorteile haben**, können Sie annehmen, dass jedes Kind nur das Trikot möchte.

⁸Die Pakete sind identisch, und die Fischköpfe sind sehr frisch und riechen nicht. Deshalb kann das Kind keine schlaue Wahl treffen.

⁹Obwohl das Kind die Pakete nicht unterscheiden kann, hat der Weihnachtsmann die Pakete eingepackt und gemischt. Deshalb weiß er, welches Paket das Trikot enthält, und vermeidet es.

¹⁰Dieses Jahr haben viele Leute sich ein paar Bitcoins gewünscht, aber der Weihnachtsmann hat nur Magie und Elfen, aber keinen Supercomputer, und könnte so viel Bitcoins nicht produzieren.

ich, dass du mir ein gutes Geschenk geben solltest. Dieses Jahr brauche ich besondere Würfel.

Mein Freund Edinson und ich spielen täglich mit meinen drei normalen Würfeln. Zuerst wählt Edinson ein Würfel aus, und danach wähle ich einen anderen Würfel aus. Wir würfeln unsere Würfel, und der Spieler mit der größeren Augenzahl gewinnt.

Aber in diesem Spiel gewinne ich nicht so oft, und das ist traurig. Kannst du mir drei Würfeln schicken, sodass egal welchen Würfel Edinson auswählt, ich meistens gewinne?

Natürlich ist es wichtig, dass die Würfel fair sind. Ich möchte meinen Freund nicht betrügen!¹¹

Vielen Dank, und bis nächstes Jahr!

Liebe Grüße,
Kylian

Zuerst hat der Weihnachtsmann gedacht, dass solche Würfel nicht existieren. Wenn die Würfel fair sind, wie ist es möglich, dass ein Würfel meistens eine höhere Augenzahl als der andere zeigt? Aber dann hat er das Schlupfloch gefunden!

Dass die Würfel fair sind, bedeutet nur, dass jede Seite die Wahrscheinlichkeit $1/6$ hat. Aber es ist nicht notwendig, dass die Augenzahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ liegen. Vielleicht kann man mit anderen Zahlen drei Würfel erzeugen, sodass es für jeden Würfel davon einen anderen gibt, der meistens eine höhere Augenzahl zeigt.

Der Weihnachtsmann und seine klügsten Elfen haben dieses Problem durchdacht und endlich gelöst. Am Heiligabend wird Kylian drei faire Würfel bekommen. Der erste hat die Augenzahlen $\{3, 4, 7, 8, 17, 18\}$ auf seinen Seiten, der zweite hat die Augenzahlen $\{1, 2, 11, 12, 15, 16\}$, und der dritte hat die Augenzahlen $\{5, 6, 9, 10, 13, 14\}$. Zeigen Sie, dass egal welchen Würfel Edinson auswählen wird, Kylian einen anderen Würfel würfeln kann, sodass er mit Wahrscheinlichkeit $5/9$ die höhere Augenzahl haben wird.

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Endlich ist alles in Ordnung. Alle Geschenke werden eingepackt, die Rentiere werden gefüttert, und der Weihnachtsmann wird bald mit der Lieferung von Geschenken anfangen. Aber dann ruft eine Elfe, „Moment! Wir haben einen verspäteten Brief erhalten.“ Der Brief kommt von Alex aus Berlin, der ein sehr gutes und prägnantes Kind ist.

**Lieber Weihnachtsmann,
darf ich ein Stochastik Lehrbuch haben?
Vielen Dank, Alex**

Zum Glück hat der Weihnachtsmann seine persönliche Kopie von Behrends, die er Alex geben kann. Aber als er dieses Buch überprüft, sieht er, dass ein Blatt fehlt.

¹¹Das ist selbstverständlich, weil Kylian ein gutes Kind ist, und ein gutes Kind wird nicht schummeln.

Das ist wirklich eine Katastrophe! Es gibt keine andere Möglichkeit, als die fehlenden Beweise selbst reinzuschreiben.¹²

Leider hat der Weihnachtsmann die Stochastikvorlesungen nicht besucht, weil er keine Zeit dafür hatte. Deshalb weiß er die Beweise nicht. Bitte beweisen Sie die folgenden Aussagen und retten Sie dadurch Weihnachten.

- (a) Sei (Ω, \mathbb{P}) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und seien $\{E_i : i \in I\}$ eine Menge von Ereignissen $E_i \subseteq \Omega$. Sei $\mathbb{1}_{E_i}$ die Indikatorfunktion für das Ereignis E_i . Die Menge von Zufallsvariablen $\{\mathbb{1}_{E_i} : i \in I\}$ ist unabhängig genau dann, wenn die Menge von Ereignissen $\{E_i : i \in I\}$ unabhängig ist.
- (b) Seien X_1, X_2, \dots, X_n unabhängige Bernoulli-Zufallsvariablen zum Parameter p , und sei $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Dann ist die Verteilung¹³ von X die Binomialverteilung zu den Parametern n und p .

¹²Obwohl der Weihnachtsmann ein Amazon-Prime-Mitglied ist, braucht Amazon leider mindestens zwei Tage, um etwas zum Nordpol zu liefern.

¹³Hier sollten Sie die Wahrscheinlichkeit von $\{X = k\}$ für jedes k berechnen.