

DOZENT: SHAGNIK DAS
TUTOREN: TIM DITTMANN, FELIX HENNEKE, GUSNADI WIYOGA

Übungsblatt 11

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis um 10:00 am Montag, 29. Januar, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Sei $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei Ω_2 eine beliebige Menge. Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ eine Menge von Teilmengen von Ω_2 , und sei $\mathcal{E}_2 = \sigma(\mathcal{M})$ die von \mathcal{M} erzeugte σ -Algebra. Sei $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung.

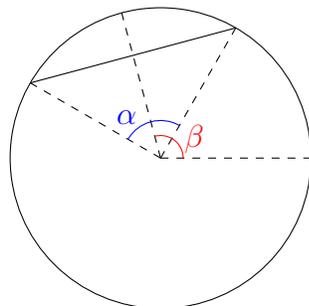
- Beweisen Sie, dass $\{F : X^{-1}(F) \in \mathcal{E}_1\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ eine σ -Algebra auf Ω_2 ist.
- Leiten Sie ab, dass X genau dann eine Zufallsvariable ist, wenn $X^{-1}(M) \in \mathcal{E}_1$ für jede Menge $M \in \mathcal{M}$.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

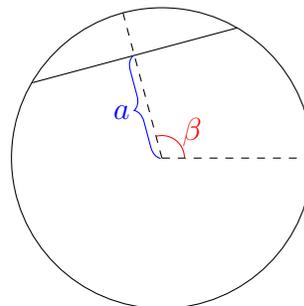
Wir haben einen Kreis mit Radius r . Wie wahrscheinlich ist es, dass eine zufällige Sehne länger als eine Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist? In der Vorlesung haben wir die Frage beantwortet, wenn der Mittelpunkt der Sehne auf dem Kreis gleichverteilt ist.

Bitte wenden Sie die folgenden Modelle von einer zufälligen Sehne an, um die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

- Die Sehne wird durch den Winkel α , unter dem die Sehne vom Kreismittelpunkt aus zu sehen ist, und den Winkel β , der die Richtung der Mittelsenkrechte angibt, bestimmt. Die zwei Winkel sind gleichverteilt.
- Die Sehne wird durch den Abstand a vom Kreismittelpunkt und den Winkel β , der die Richtung der Mittelsenkrechte angibt, bestimmt. Diese zwei Parameter sind gleichverteilt.



(a)



(b)

Aufgabe 3

[10 Punkte]

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eine Verteilung, und sei F seine Verteilungsfunktion. Sei $((0, 1), \mathcal{B}_{(0,1)})$ der Ereignisraum, wobei $\mathcal{B}_{(0,1)}$ die Menge aller Borelmengen, die Teilmengen von $(0, 1)$ sind, ist.

Wir definieren eine Abbildung $Q : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$Q(u) = \sup \{z : F(z) \leq u\}.$$

Zeigen Sie, dass:

- (a) Q wohldefiniert ist. Das heißt, für jedes $x \in (0, 1)$, gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$, sodass $Q(x) = y$.
- (b) Q eine Zufallsvariable ist.
- (c) die Verteilungsfunktion des von Q induzierten Wahrscheinlichkeitsraumes F ist.

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Drei Geschwister, Arya, Jon und Sansa, möchten Schwertkämpfen mit Schwertern aus Holz üben. Aber leider ist der Winter schon genaht, und deshalb wird fast alles Holz in ihrem Haus als Brennholz benutzt.

Es gibt nur einen Zweig, deren Länge ein Meter ist, aus dem sie Schwerter machen können. Natürlich haben sie kein Lineal, weil Lineale aus Holz sind, und alles andere Holz wird verbrannt. Sie zerbrechen den Zweig an zwei zufälligen Punkten, um drei Schwerter daraus zu bauen. Weil Arya das jüngste Kind ist, bekommt sie das kleinste Stück.

Berechnen Sie die Dichtefunktion der Länge ihres Schwertes. Wie wahrscheinlich ist es, dass ihr Schwert länger als 0,25 Meter ist?

[Hinweis: <http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt11.html>.]