

DOZENT: SHAGNIK DAS
TUTOREN: TIM DITTMANN, FELIX HENNEKE, GUSNADI WIYOGA

Übungsblatt 12

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis um 10:00 am Montag, 5. Februar, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Seien $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ zwei Konstanten. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen von Ω nach \mathbb{R} Zufallsvariablen sind.

- (a) $\gamma X + \delta$
- (b) $X + Y$
- (c) $X \cdot Y$
- (d) X/Y (Nehmen Sie an, dass Y nie 0 ist.)

[Hinweis: <http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt12.html>.]

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eine Verteilung mit Dichtefunktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, und seien $Z, Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen, sodass $\int_{\mathbb{R}} Z(x)^2 \rho(x) dx$ und $\int_{\mathbb{R}} Y(x)^2 \rho(x) dx$ endlich sind. Die Kovarianz von Z und Y wird durch

$$\text{Cov}(Z, Y) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

definiert.¹

- (a) Zeigen Sie, dass $V(Z + Y) = V(Z) + V(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(Z, Y)$.

Z und Y heißt *unkorreliert*, wenn $\text{Cov}(Z, Y) = 0$.

- (b) Beweisen Sie, dass wenn Z und Y unabhängig voneinander sind, sind sie auch unkorreliert.
- (c) Geben Sie ein Beispiel von zwei unkorrelierten Zufallsvariablen, die nicht unabhängig voneinander sind.

¹Merken Sie sich, dass die Erwartungswerte $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Y)$ und $\mathbb{E}(ZY)$ existieren, weil $|Z| \leq 1 + Z^2$, $|Y| \leq 1 + Y^2$ und $|ZY| \leq Z^2 + Y^2$.

Aufgabe 3

[10 Punkte]

- (a) Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_1)$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[c, d]$. In der Vorlesung haben wir den Erwartungswert dieser Verteilung berechnet. Was ist ihre Varianz?
- (b) Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_2)$ die Exponentialverteilung zum Parameter $\alpha > 0$, die die Dichtefunktion

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

hat. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz dieser Verteilung.

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Ich habe zwei Eulen, Duo und Lingo, gekauft. Diese Eulen sind sehr schlau – zu zufälligen Zeitpunkten sprechen sie deutsche Sätze! Ich habe sie für eine Woche beobachtet, und ich habe gelernt, dass die Wartezeit (in Minuten) zwischen Sätzen von Duo der Exponentialverteilung zum Parameter 0,05 entspricht. Die Wartezeit von Lingo hat dieselbe Verteilung.² Diese Wartezeiten sind unabhängig voneinander. Mein Freund Novak glaubt nicht, dass meine Eulen sprechen können.³ Deshalb habe ich ihn zu mir eingeladen, und er ist um 12 Uhr gekommen. Das letzte Mal, dass Duo gesprochen hatte, war um 11.41,⁴ und das letzte Mal, dass Lingo gesprochen hatte, war um 11.53.⁵

- (a) Beschreiben Sie die Verteilung⁶ der Zeit, die wir noch auf den nächsten Satz von Duo warten müssen und die Verteilung der Zeit, die wir noch auf den nächsten Satz von Lingo warten müssen. Beachten Sie, dass Sie bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen sollten.⁷ Wie wahrscheinlich ist es, dass Duo früher als Lingo sprechen wird?
- (b) Natürlich ist es genug, wenn nur eine der zwei Eulen sprechen würde. Wie lang müssen wir warten, bis der nächste Satz gesprochen wird?

²Das ist keine Überraschung, weil Duo und Lingo Zwillinge sind.

³Hier muss ich leider sagen, dass diese Geschichte erfunden ist. Ich kann nur wünschen, dass ich einen Freund haben würde.

⁴Duo hat gesagt, „Hilfe! Das Pferd frisst die heilige Kartoffel.“

⁵Lingo hat gesagt, „Wir müssen den Drachen retten.“

⁶Sie sollten die Dichtefunktionen angeben, aber es ist einfacher, wenn Sie die Verteilungsfunktionen zuerst berechnen.

⁷Zum Beispiel, wenn Sie die Verteilung der Wartezeit von Duo berechnen, haben Sie die Voraussetzung, dass die Wartezeit größer als 19 Minuten ist.