Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogen)

Winter Semester 2017/18
4. Februar 2018

Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittmann, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

Übungsblatt 13

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis um 10:00 am Montag, 12. Februar, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Normalverteilung mit Erwartungswert a und Varianz σ^2, die die Dichtefunktion

$$f_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

hat.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt13.html.]

Aufgabe 2 [10 Punkte]

(a) Sei Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert a und Varianz σ^2. Sei $Z = (Y - a)/\sigma$. Berechnen Sie die Dichtefunktion von Z und zeigen Sie, dass sie der Standard-Normalverteilung entspricht.

(b) Die Tabelle auf der letzten Seite liefert die Werte der Verteilungsfunktion von der Standard-Normalverteilung, $F(x)$. Zum Beispiel, wenn $x = 1.32$, liegt der Wert $F(1.32)$ in der Reihe mit der Bezeichnung „1.3 “und in der Spalte mit der Bezeichnung „0.02 “. Also, $F(1.32) = 0.9066$.

Üben Sie das Ablesen der Tabelle an folgenden Beispielen:

(i) Wie groß ist $\mathbb{P}([-0.67, 0.38])$ unter der Standard-Normalverteilung?

(ii) Bestimmen Sie c, sodass $\mathbb{P}([-0.33, c]) = 0.5$ unter der Normalverteilung mit Erwartungswert 1 und Varianz 4.

(iii) Wie groß ist σ, wenn man weiß, dass $\mathbb{P}([-4, 0]) = 0.82$ unter der Normalverteilung mit Erwartungswert -2 und Varianz σ^2?

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt13.html.]

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen, die exponentialverteilt zum Parameter α sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die Summe der ersten n Zufallsvariablen und sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$ der Durchschnitt der ersten n Zufallsvariablen.

(a) Beweisen Sie, dass S_n die Dichtefunction

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \alpha^n e^{-\alpha x} & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

hat.

(b) Nehmen Sie an, dass $\alpha = 1$ und $n = 100$. Wir interessieren uns für das Ereignis $E = \{\bar{X}_{100} \geq 1.1\}$. Was können wir über die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(E)$ sagen, wenn wir:

(i) die Markov-Ungleichung anwenden?

(ii) die Tschebyscheff-Ungleichung anwenden?

(iii) den zentralen Grenzwertsatz anwenden?[1]

(iv) die Wahrscheinlichkeit genau berechnen?[2]

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt13.html.]

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen. Wir sagen, dass $X_n \to a$ *in Wahrscheinlichtkeit*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon) = 0$. Wir sagen, dass $X_n \to a$ *fast sicher*, wenn $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = a) = 1$.

Bedenken Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathbb{E}, \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $[0,1]$ ist. Für $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \ell \leq k-1$, sei $Y_{k,\ell} : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Zufallsvariable, wobei

$$Y_{k,\ell}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } kx \in [\ell, \ell+1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir haben die Folge

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots) = (Y_{1,0}, Y_{2,0}, Y_{2,1}, Y_{3,0}, Y_{3,1}, Y_{3,2}, Y_{4,0}, Y_{4,1}, \ldots)$$

von Zufallsvariablen.[3]

(a) Zeigen Sie, dass $X_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit.

(b) Konvergiert X_n gegen 0 fast sicher?

---

[1] Hier sollten Sie die Tabelle auf der nächsten Seite benutzen.

[2] Hier sollten Sie das entsprechende Integral genau schreiben. Sie können es mit einem Computer lösen. Wir empfehlen http://www.wolframalpha.com.

[3] Genauer beschrieben ist $X_n = Y_{k,\ell}$, wobei (k,ℓ) das eindeutige Paar mit $0 \leq \ell \leq k-1$ und $n - 1 = \binom{k}{2} + \ell$ ist.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Abbildung 1: Die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung