Musterlösung der Probeklausur

Aufgabe 1

- Zuerst müssen wir den Wahrscheinlichkeitsraum beschreiben:
  - Insgesamt gibt es 600 Bücher aus dem zwanzigsten Jahrhundert.
  - Von diesen Büchern müssen m wir drei ohne Wiederholung und mit Ordnung (das erste ist für Ana, das zweite für Béla, und das dritte für Carmen) auswählen.
  - Wir können unsere Auswahl als ein Tripel $(a_1, b_1, c_1) \in [600]^{\underline{3}}$ bezeichnen.
  - Es gibt auch 600 Bücher aus dem neunzehnten Jahrhundert, von dem wir drei ohne Wiederholung und mit Ordnung auswählen müssen. Diese Auswahl ist ein zweites Tripel $(a_2, b_2, c_2) \in [600]^{\underline{3}}$.
  - Deshalb haben wir die Menge der Elementarereignisse $\Omega = [600]^{\underline{3}} \times [600]^{\underline{3}}$. Ein Elementarereignis ist das Paar $((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2))$, wobei a_1 ist das Buch vom zwanzigsten Jahrhundert, das Ana erhält, a_2 ist das Buch vom neunzehnten Jahrhundert, das Ana erhält, und soweit.
  - Die möglichen Geschenke sind gleichverteilt, also passt hier der Laplaceraum.
  - Das bedeutet, dass ein Ereignis $E \subseteq \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{600^{\underline{3}} \times 600^{\underline{3}}}$ hat.
- Jetzt müssen wir das Ereignis, für das wir uns interessieren, beschreiben:
  - Sei E das Ereignis, dass genau zwei Freunde identische Geschenke erhalten.
  - Merken Sie sich, dass es unmöglich ist, dass die drei Geschenke identisch sind, weil es gibt nur zwei Kopien von jedem Roman aus dem zwanzigsten Jahrhundert.
  - Deshalb ist $E = E_{AB} \dot\cup E_{AC} \dot\cup E_{BC}$, wobei E_{AB} ist das Ereignis, dass die Geschenke von Ana und Béla identisch sind, E_{AC} ist das Ereignis, dass die Geschenke von Ana und Carmen identisch sind, und E_{BC} ist das Ereignis, dass die Geschenke von Béla und Carmen identisch sind.
- Jetzt berechnen wir die Größe dieser kleineren Ereignisse.
  - Wir fangen mit E_{AB} an.
  - Es gibt 600 Möglichkeiten für a_1, und 600 Möglichkeiten für a_2.
  - Jetzt muss Béla das identische Geschenk als Ana erhält. Es gibt nur eine weitere Kopie vom Buch a_1, die b_1 sein muss. Deshalb ist b_1 schon bestimmt. Es gibt zwei weitere Kopien vom Buch a_2, also gibt es zwei Möglichkeiten für b_2.
  - Die Bücher c_1 und c_2 sind beliebig. Es gibt noch 598 Bücher aus dem zwanzigsten Jahrhundert und 598 aus dem neunzehnten Jahrhundert, also 598 Möglichkeiten für c_1 und 598 Möglichkeiten für c_2.
  - Wir wenden die Produktregel an: $|E_{AB}| = 600 \times 600 \times 1 \times 2 \times 598 \times 598$.
  - Die Berechnungen für E_{AC} und E_{BC} sind ähnlich: $|E_{AC}| = |E_{BC}|$.
- Schließlich berechnen wir die Wahrscheinlichkeit von E.
  - Per der Summenregel (die Ereignisse sind paarweise disjunkt) ist
    $$|E| = |E_{AB}| + |E_{AC}| + |E_{BC}| = 3 \times |E_{AB}| = 6 \times 600 \times 600 \times 598 \times 598.$$
  - Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, die wir suchen, $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{600^{\underline{3}} \times 600^{\underline{3}}} = \frac{6}{599^2}$.

Aufgabe 2

a) (2 Punkte)

- Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable. Der Erwartungswert von X ist definiert als

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \tag{1}$$

  , <u>sofern</u> die Reihe absolut konvergiert (d.h. $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)\mathbb{P}(\omega)| < \infty$).

b) (8 Punkte)

- Sei Z_i die Indikatorfunktion der Menge aller Permutationen, die i fixieren, also

$$Z_i = \mathbb{1}_{\{\pi \in [n]^{\underline{n}} | \pi(i) = i\}} \tag{2}$$

- Dann zählt $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$ die Anzahl von Fixpunkten.
- Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i)$
- $\mathbb{E}(Z_i) = \sum_{k \in Z_i(\Omega)} k\mathbb{P}(Z_i = k) = \mathbb{P}(\{\pi \in [n]^{\underline{n}} | \pi(i) = i\})$
- Es gibt (n-1)! Permutationen mit $\pi(i) = i$ (permutiere $[n] \setminus \{i\}$) und n! Permutationen insgesamt.
- $\Rightarrow \mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\pi \in [n]^{\underline{n}} | \pi(i) = i\}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$

Aufgabe 3 [10 Punkte]

(a) [3 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable, deren Erwartungswert existiert. Die Varianz ist dann definiert als

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right),$$

falls dieser Erwartungswert existiert.

(b) [7 Punkte]

Sei $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, also

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!} \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\mathbb{E}(X) = \lambda$ gilt und dass $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ gilt, falls $\mathbb{E}(X^2)$ existiert.
- Es gilt

$$\begin{aligned}
E(X^2) &\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)+1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} \qquad + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} e^{-\lambda}}{(k-2)!} \qquad + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= (\lambda^2 + \lambda) e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= (\lambda^2 + \lambda) e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

  $(*)$ Alle Summanden der Reihe sind positiv. Also konvergiert die Reihe genau dann absolut, wenn sie konvergiert. Damit folgt die Existenz des Erwartungswerts $\mathbb{E}(X^2)$ aus dieser Rechnung.

- Zusammen folgt

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Aufgabe 4

(a) [4 Punkte]

Selbstverständlich sollte man den zu beweisenden Satz zunächst erläutern:

> **Satz von Bayes:** Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \subset \Omega$ eine Ereignis davon mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Für jede Partition $\Omega = \uplus_{i=1}^n B_i$ von Ω in die disjunkten Ereignisse $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$ gilt für alle $k \in [n]$ die folgende Gleichung
>
> $$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Bemerkung: Man kann auch das hier beschriebene Theorem als der erweiterte Satz von Bayes betrachten und stattdessen das einfache Theorem schreiben:

> **(Einfacher) Satz von Bayes:** Für jede Ereignisse A und B von einem Wahrscheinlickeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit positiven Wahrscheinlichkeiten ($\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B) > 0$) gilt
>
> $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Beweis: Sei $k \in [n]$ fixiert. Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit liefert uns

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \text{ und } \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Dies impliziert $\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$. Nach einer einfachen Umformung und dem Ersatz von B durch B_k gilt lediglich

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Die Umformung des Nenners mit

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

lässt sich durch den Satz von den totalen Wahrscheinlichkeiten für die Ereignis A und die Partition $\Omega = \uplus_{i=1}^n B_i$ bestätigen.

(b) [6 Punkte]

Zuerst sollen wir den Ereignisraum bestimmen. Ein möglicher Raum ist der Tupelraum $\Omega = [2] \times \{K, Z\} = \{(1, K), (1, Z), (2, K), (2, Z)\}$, wobei die erste Komponente die Wahl der Münze beschreibt und die zweite das, was die gewählte Münze zeigt.

Danach definieren wir die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ "die gewählte Münze zeigt Kopf"}\} = \{(1, K), (2, K)\}, \\ B_1 &= \{\text{ "die erste Münze wird gewählt"}\} = \{(1, K), (1, Z)\}, \\ B_2 &= \{\text{ "die zweite Münze wird gewählt"}\} = \{(2, K), (2, Z)\}. \end{aligned}$$

Die gegebenen Informationen lassen sich dann wie folgendes interpretieren:

$$\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B_1) = p, \quad \mathbb{P}(B_2) = 1 - p,$$
$$\mathbb{P}(A|B_1) = \tfrac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(A^c|B_2) = \tfrac{9}{50}.$$

Es ist leicht zu folgern dass $\mathbb{P}(A|B_2) = 1 - \frac{9}{50} = \frac{41}{50}$. Mithilfe des Satzes von den totalen Wahrscheinlichkeiten erhalten wir lediglich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) \\
\iff \frac{1}{2} &= \frac{1}{5}p + \frac{41}{50}(1-p) \\
\iff 25 &= 10p + 41 - 41p \\
\iff 31p &= 16 \\
\iff p &= \frac{16}{31}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) [2 Punkte]

- Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsrau und $\{E_i | i \in I\}$ eine Menge von Ereignissen. Diese Menge ist unabhängig, wenn für alle endlichen Teilmengen $J \subseteq I$ gilt:

$$\mathbb{P}(\cap_{j \in J} E_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(E_j) \tag{3}$$

(b) [2 Punkte]

- $\Omega = [6]^3$
- Der Würfel ist fair $\Rightarrow \mathbb{P} \equiv \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{216}$, also gleichverteilt.

(c) [6 Punkte]

(i)

- $|E_1| = 3 \times 6 \times 6 = 108$, da wir alle Tupel der Form $(g, [6], [6])$ zählen (g=gerade, u=ungerade).
- $E_2 = E_{2,1} \dot{\cup} E_{2,2}$, wobei $E_{2,1}$ die Tupel der Form (g, u, u) und $E_{2,2}$ die der Form (u, u, g) sind.
- $\Rightarrow |E_2| = |E_{2,1}| + |E_{2,2}| = 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 = 54$
- $|E_1 \cap E_2| = |E_{2,1}| = 27$
- $\Rightarrow \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$
  $\Rightarrow E_1$ und E_2 unabhängig.

(ii)

- $|E_1| = 6 \times 3 \times 6 = 108$
- E_2 wie in (i)
- $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 0 \neq \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2) \Rightarrow E_1$ und E_2 nicht unabhängig