Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik — Winter Semester 2017/18
Stochastik 1 (lehramtsbezogen) — 22. Dezemeber 2017

Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittman, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

Probeklausur

Es ist empfehlenswert die Aufgaben nach etwaiger Vorbereitung, alleine, ohne Hilfsmittel (nur mit Stift und Papier) und mit Zeitmessung (2 Stunden) zu lösen. Wenn Sie Ihre Lösungen abgeben, korrigieren wir diese wie eine richtige Klausur (die Punkte zählen dabei aber weder für den Übungsschein, noch für die Abschlussnote.) Natürlich können Sie die Aufgaben auch mit Partner, Buch, Taschenrechner, und in 20 Stunden lösen, das wird genauso korrigiert.
Alle Lösungen müssen vollständig und nachvollziehbar **BEGRÜNDET** werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden möchten, dann geben Sie es genau an.

Abzugeben bis zum 10:00am Montag, 8. Januar, im Fach von Felix.

Aufgabe 1 [10 Punkte]
Eine Bibliothek hat 300 verschiedene Romane aus dem zwanzigsten Jahrhundert und 200 verschiedene Romane aus dem neunzehnten Jahrhundert. Von jedem Roman aus dem zwanzigsten Jahrhundert gibt es zwei Kopien und von jedem Roman aus dem neunzehnten Jahrhundert gibt es drei Kopien. Die Bibliothek wird geschlossen und im Zuge dessen werden alle Bücher verschenkt. Jeder kann sich anmelden, um ein Geschenk zu erhalten. Ein Geschenk besteht aus zwei Büchern: ein zufälliges Buch aus jedem der beiden Jahrhunderte. Drei Freunde (Ana, Béla, Carmen) melden sich für das Give-away an.
Was ist die Wahrscheinlichkeit davon, dass genau zwei von ihnen identische Geschenke erhalten? Beschreiben Sie formell den Wahrscheinlichkeitsraum und das passende Ereignis.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

(a) Definieren Sie den Begriff vom Erwartungswert einer Zufallsvariablen.

(b) Sei $Z : [n]^{\underline{n}} \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ die Zufallsvariable auf dem Laplaceraum $([n]^{\underline{n}}, \mathbb{P})$, die die Anzahl der Fixpunkte von Permutationen liefert. Formell gesagt: $Z(\pi) = |\{i : \pi_i = i\}|$, für jedes $\pi \in [n]^{\underline{n}}$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

(a) Definieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.

(b) Berechnen Sie die Varianz der Poisson-Verteilung zum Parameter λ.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

(a) Beweisen Sie den Satz von Bayes.

(b) Es gibt zwei Münzen, die unfair sind. Die erste Münze zeigt Kopf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$, und die zweite Münze zeigt Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{50}$. Eine Münze wird zufällig ausgewählt, wobei die Wahrscheinlichkeit von der ersten Münze p ist, und danach geworfen. Was muss p sein, sodass die Wahrscheinlichkeit davon, dass die ausgewählte Münze Kopf zeigt, $\frac{1}{2}$ ist?

Aufgabe 5 [10 Punkte]

(a) Definieren Sie den Begriff von Unabhängigkeit von einer Menge von Ereignissen.

(b) Beschreiben Sie formell den Wahrscheinlichkeitsraum, den Sie benutzen können für die Modellierung der Situation wenn Sie einen fairen Würfel dreimal würfeln.

(c) Entscheiden Sie, für die folgenden Paare von Ereignissen, ob sie unabhängig voneinander sind.

   (i) E_1: Bei dem ersten Wurf kommt eine gerade Augenzahl.
   E_2: Zwei Würfe hintereinander zeigen ungerade Augenzahlen, aber nicht drei.

   (ii) E_1: Bei dem zweiten Wurf kommt eine gerade Augenzahl.
   E_2: Zwei Würfe hintereinander zeigen ungerade Augenzahlen, aber nicht drei.