Nachdem wir unsere "wichtige Teilmengen" identifiziert haben, Mengensystem $\mathcal{W}$, benötigen wir eine σ-Algebra die $\mathcal{W}$ enthält.

Natürlich ist $\mathcal{P}(\Omega)$ immer eine σ-Algebra, aber wir haben schon gesehen, dass es manchmal "zu groß" sein könnte.

Also, nehmen wir die "kleinste" σ-Algebra die $\mathcal{W}$ enthält.

Satz: Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem auf Ω.

Dann $\exists!$ Mengensystem $\sigma(\mathcal{M})$ mit folgenden Eigenschaften

(E1) $\sigma(\mathcal{M}) \supseteq \mathcal{M}$

(E2) $\sigma(\mathcal{M})$ ist eine σ-Algebra auf Ω

(E3) $\forall$ σ-Algebra $\mathcal{M}'$ auf Ω, $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$, gilt: $\mathcal{M}' \supseteq \sigma(\mathcal{M})$

$\sigma(\mathcal{M})$ ist die von $\mathcal{M}$ erzeugten σ-Algebra.

Beweis: Definieren wir $\boxed{\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega}} \mathcal{N}}$

(E1) $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt enthält $\mathcal{M}$, $\Rightarrow$ auch ihre Schnitt enthält $\mathcal{M}$.

(E2) (S1) für $\sigma(\mathcal{M})$: $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt $\Omega \in \mathcal{N} \Rightarrow \bigcap \mathcal{N} \ni \Omega$

(S2) für $\sigma(\mathcal{M})$: $\forall E \in \sigma(\mathcal{M}) = \bigcap \mathcal{N} \Rightarrow E \in \mathcal{N}$ $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt
~~aber~~ $\forall$ solche $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra ist $\Rightarrow \Omega \setminus E \in \mathcal{N}$ für $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt $\Rightarrow \Omega \setminus E \in \bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$

(S3) für $\sigma(\mathcal{M})$: $\forall E_1, E_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{M}) = \bigcap \mathcal{N} \Rightarrow E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{N}$ für $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt. Aber $\forall$ solche $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra ist $\overset{S(3)}{\Longrightarrow}$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{N}$ für $\forall \mathcal{N}$ von der Schnitt $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$

(E3) Wenn $\mathcal{M}'$ σ-Algebra auf Ω ist und $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$, dann $\mathcal{M}'$ ein Mitglied der Schnitt $\bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$ ist $\Rightarrow \mathcal{M}' \supseteq \bigcap \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M})$ $\square$

<u>Bemerkung</u>: Wie kann mann die Elemente von $\sigma(\mathcal{W})$ vorstellen / konstruiren?

- alle höchstens abzählbare Vereinigung / Durchschnitt aus der Mengen $\{M, \Omega \setminus M : M \in \mathcal{W}\}$ in $\sigma(\mathcal{W})$ sein soll. $\rightsquigarrow$ Mengensystem $\mathcal{H}_1(\mathcal{W})$

Für einige $\mathcal{W}$ ist dies noch nicht alles...

- alle höchstens abzählbare Vereinigung / Durchschnitt aus der Mengen $\{M, \Omega \setminus M : M \in \mathcal{H}_1(\mathcal{W})\}$ <u>auch</u> in $\sigma(\mathcal{W})$ sein soll. $\rightsquigarrow$ Mengensystem $\mathcal{H}_2(\mathcal{W})$

Und noch nicht alles... $\mathcal{H}_3(\mathcal{W}), \mathcal{H}_4(\mathcal{W}), \ldots$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(\mathcal{W})$ ist auch noch nicht genug manchmal

(kann sein, z.B., dass mit $M_i \in \mathcal{H}_i(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{H}_{i-1}(\mathcal{W})$ die Vereinigung $\bigcup M_i \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(\mathcal{W})$.)

[Mann muss $\sigma(\mathcal{W}) = \mathcal{H}_\omega(\mathcal{W})$ wobei ω die kleinste überabzählbare Ordinalzahl bezeichnet ...

und $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{W}) = \mathcal{H}\left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{H}_\beta(\mathcal{W})\right)$ $\forall \alpha > 1$]

<u>Bemerkung</u>: $\mathcal{B}$ enthält praktisch alle vorkommenden Mengen aber nicht <u>alle</u>! Die verrückte Menge Π aus Vitalis Satz ist nicht Borel.

Borel'sche σ-Algebra

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Wir wählen $\mathcal{I}_{ab} = \{[a,b] \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\}$

Die erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}_{ab})$ ist die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen Borelmengen

Satz: Die folgende Mengen sind Borel-mengen:

(i) $(-\infty, c]$ $\quad \forall c \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall$ offene und $\forall$ abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$.

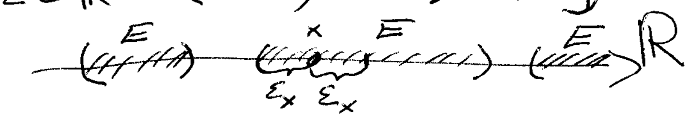
Beweis: (i) $(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, c]$

Da $\forall$ $[-n,c]$ ein abgeschlossenes Intervall ist, ist ihre (abzählbare) Vereinigung in der von $\mathcal{I}_{ab}$ erzeugten σ-Algebra (d.h. in $\mathcal{B}$) erhalten.

(ii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge.

$\forall x \in E$ sei $\varepsilon_x = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R} : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq E\}$

Da E offen ist, gilt: $\varepsilon_x > 0$.

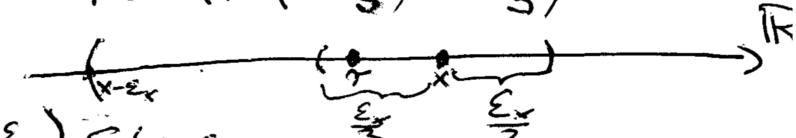


Dann $E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap E} \left[q - \frac{\varepsilon_q}{2}, q + \frac{\varepsilon_q}{2}\right]$

$\boxed{\supseteq}$ Per Def. von ε_q: $\left[q - \frac{\varepsilon_q}{2}, q + \frac{\varepsilon_q}{2}\right] \subseteq (q - \varepsilon_q, q + \varepsilon_q) \subseteq E$

$\boxed{\subseteq}$ Sei $x \in E$ beliebig. $\exists\, r \in \mathbb{Q} \cap \left(x - \frac{\varepsilon_x}{3}, x + \frac{\varepsilon_x}{3}\right) \subseteq E$

Dann $\varepsilon_r > \frac{2}{3}\varepsilon_x$



weil $\left(r - \frac{2}{3}\varepsilon_x, r - \frac{2}{3}\varepsilon_x\right) \subseteq (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq E$

Dann $x \in \left(r - \frac{\varepsilon_x}{3}, r + \frac{\varepsilon_x}{3}\right) \subseteq \left[r - \frac{\varepsilon_r}{2}, r + \frac{\varepsilon_r}{2}\right]$

Damit: E ist eine (abzählbare) Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, deswegen muß E auch in der von $\mathcal{I}_{ab}$ erzeugten σ-Algebra enthalten sein
$\Rightarrow$ E ist eine Borel-menge.

Wenn $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene Menge ist:
$\Rightarrow \overline{C} = \mathbb{R} \setminus C$ eine offene Menge ist $\Rightarrow \overline{C} \in \mathcal{B}$
Da $\mathcal{B}$ σ-Algebra ist, $\overline{\overline{C}} = C \in \mathcal{B}$. $\square$

Satz: (Einen alternativen Erzeuger)

$$\mathcal{B} = \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}), \text{ wobei } {}_{\infty}\mathcal{I}_{ab} := \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$$

Beweis: $\boxed{\supseteq}$ (i) $\Rightarrow {}_{\infty}\mathcal{I}_{ab} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}) \subseteq \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$

weil $\mathcal{B}$ selbst die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{B}$ enthält

$\boxed{\subseteq}$ sei $[a,b] \in \mathcal{I}_{ab}$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall.

$$[a,b] = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{(-\infty, a - \tfrac{1}{n}]}\right) \cap (-\infty, b]$$

$\overline{(-\infty, a-\frac{1}{n}]} = (a - \frac{1}{n}, \infty) \in \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$ weil es das Komplement eines Elements von ${}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}$.

Dann $[a,b]$ ist der Schnitt von abzählbar vielen Elementen von $\sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$ und daber ist $[a,b]$ auch in $\sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$ enthalten.

$$\Rightarrow \mathcal{I}_{ab} \subseteq \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab}) \Rightarrow \underbrace{\sigma(\mathcal{I}_{ab})}_{= \mathcal{B}} \subseteq \sigma(\sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})) = \sigma({}_{\infty}\mathcal{I}_{ab})$$

$\square$

W-keitstheorie in der Ebene, im 3D-Raum, ...

$n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\Omega = \mathbb{R}^n}$ Dann $\mathcal{I}_{ab}^n = \left\{ \times_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n : a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$ ist die Mengensystem aller achsenparallelen abgeschlossenen Quader in $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{I}_{ab})$ ist die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$

- $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}$

W-keitstheorie in $[0,1]$, in $[0,\infty)$, in "schöne" Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige. ($\Omega \neq \emptyset$)

Dann $\mathcal{B}^n_\Omega := \{ \Omega \cap B : B \in \mathcal{B}^n \}$ ist die Borel'sche σ-Algebra auf Ω.

Produkt-σ-Algebra Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge

Seien $(\Omega_i, \mathcal{E}_i)$ Ereignisräume, $\forall i \in I$,

(d.h., Ω_i ist eine Menge, $\mathcal{E}_i$ ist eine σ-Algebra auf Ω_i)

Sei $\boxed{\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i} = \{(e_i)_{i\in I} : e_i \in \Omega_i\}$

das kartesische Produkt von den Ω_i.

- Die Produkt σ-Algebra $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i$ auf Ω ist die von $\mathcal{W} = \{\mathrm{Proj}_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{E}_i\}$ erzeugten σ-Algebra; $\boxed{\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E} := \sigma(\mathcal{W})}$. (wobei $\mathrm{Proj}_i : \Omega \to \Omega_i$, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathrm{Proj}_i(\omega) := \omega_i$)

Bemerkung: "Wichtige" Teilmengen: Wenn $A \in \mathcal{E}_i$, d.h., wir werden die W-keit von A messen können, wollen wir auch die Wkeit von $\mathrm{Proj}_i^{-1}(A) = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i-1} \times A \times \Omega_{i+1} \times \ldots \subseteq \Omega$ messen.

Spezialfall: $\Omega_i = E$ und $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}$ $\forall i \in I$

$$\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i = E^I \quad \text{und} \quad \bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i = \mathcal{E}^{\otimes I} \leftarrow \text{Notation}$$

Beispiele ① $I = \mathbb{N}$ $\Omega_i = \{0,1\}$, $\mathcal{E}_i = \mathcal{P}(\{0,1\})$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

In $\{0,1\}^{\otimes \mathbb{N}}$ findet man alle "Rechteckzylindern":

$\forall J \subseteq I$
$\forall \alpha_j \in \{0,1\}, j \in J$, $\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_j = \alpha_j \ \forall j \in J\} = \bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_j^{-1}(\alpha_j)$

ist der Schnitt von abzählbar vielen Mengen von $\mathcal{W}$.

② $I = [n]$ $\Omega_i = \mathbb{R}$ $\mathcal{E}_i = \mathcal{B}$, $\forall i \in [n]$,

$\boxed{\text{HA:}}$ $\mathcal{B}^{\otimes n} = \mathcal{B}^n$ (d.h., das n-maliges Produkt der eindimensionalen Borel'sche σ-Algebra ist gleich

W-Maßen

Erinnerung: Sei • $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge
• $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω

Eine Funktion $\boxed{\mathbb{P}: \mathcal{E} \to [0,1]}$ mit Eigenschaften

(P1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(P2) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

heißt ein W-Maß (oder Verteilung) auf den Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{E})$.

Das Tripel $\boxed{(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})}$ heißt dann ein W-Raum

Beispiel:

$\boxed{\text{Dirac-Verteilung}}$ $(\Omega, \mathcal{E})$ beliebiger Ereignisraum

Sei $a \in \Omega$. Definieren wir $\delta_a : \mathcal{E} \to [0,1]$ wie folgt:

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

δ_a ist ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{E})$.

(P1) $\delta_a(\Omega) = 1$ weil $a \in \Omega$

(P2) Sei $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ eine disjunkte Folge

- wenn $\nexists\, i \in \mathbb{N}$ mit $a \in E_i \Rightarrow a \notin \bigcup E_i \Rightarrow$
  $\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup E_i) = 0 = \sum 0 = \sum \mathbb{P}(E_i)$
- wenn $\exists\, j \in \mathbb{N}$ mit $a \in E_j$, dann gibt es genau eins solches E_j, weil die E_i sind paarweise disjunkt.
  $\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup E_i) = 1 = 1 + 0 + 0 + \dots = \sum \mathbb{P}(E_i)$

Beispiel: $\boxed{\text{Diskrete W-Maßen}}$

Satz: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum.
Dann gilt $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ von Mengen: $\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

Beweis:

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{\omega \in \cup E_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in E_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

Jedes $\omega \in \cup E_i$ ist in genau eins E_i enthalten (weil die E_i paarweise disjunkt sind), daher klassifizieren wir die Summe nach die E_i.
Solche umordnung ist "legal", da die Folge $\sum_{\omega \in \cup E_i} \mathbb{P}(\omega)$ absolute konvergent ist. (weil $\sum_{\omega \in \cup E_i} \mathbb{P}(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1 < \infty$)

Korollar: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum.
Dann ist das Tupel $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein W-Raum.

Beweis: (P1) $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$

Def eines diskreten W-Raum

(P2) obige Satz.

Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein W-Raum. Dann gilt

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, (d.h., das unmögliche Ereignis hat W-keit 0.)

(b) $\forall E, F \in \mathcal{E}$ gilt: $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

(Additivität) Insbesondere, wenn auch $E \cap F = \emptyset$, dann $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$.

(c) (Monotonität) $\forall E, F \in \mathcal{E}$, $E \subseteq F$, gilt: $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

(d) $\forall E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{E}$ gilt: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

(σ-Subadditivität)

(e) $\forall E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{E}$, mit $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots$,

(Stetigkeit von unten) gilt: $\mathbb{P}(E_n) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ für $n \to \infty$.

(f) $\forall E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{E}$, mit $E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$,

(Stetigkeit von oben) gilt: $\mathbb{P}(E_n) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$ für $n \to \infty$.

Beweis:

(a) $\emptyset, \emptyset, \ldots \in \mathcal{E}$ ist eine disjunkte Folge $\overset{(P2)}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \ldots \Longrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(b) Fall 1. $E \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow E, F, \emptyset, \emptyset, \ldots \in \mathcal{E}$ ist eine disjunkte Folge $\overset{(P2)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup F \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \ldots = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$

Fall 2. $E, F \in \mathcal{E}$ beliebig

$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup (F \setminus E)) \underset{\text{Fall 1.}}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E) \underset{\text{Fall 1.}}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\underbrace{(F \cap E) \cup (F \setminus E)}_{= F}) - \mathbb{P}(F \cap E)$

(c) $E \subseteq F \Rightarrow F = E \cup (F \setminus E) \overset{(b)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E) \geq \mathbb{P}(E)$

(d) Sei $F_n \underset{n \geq 2}{:=} E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \in \mathcal{E}$, $F_1 := E_1$. Dann F_n eine disjunkte Folge ist und

$\forall n \in \mathbb{N}: F_n \subseteq E_n$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \overset{(P2)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) \overset{(c)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$

(e) Sei $F_n \underset{n \geq 2}{:=} E_n \setminus E_{n-1} \in \mathcal{E}$, $F_1 := E_1$. Dann F_n eine disjunkte Folge ist und

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \overset{(P2)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) =$

$= \lim_{n \to \infty} [\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2 \setminus E_1) + \ldots + \mathbb{P}(E_n \setminus E_{n-1})] =$

$\overset{(b)}{=} \lim \mathbb{P}(E_1) + (\mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1)) + \ldots + (\mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n-1})) = \lim \mathbb{P}(E_n)$

(f)

$$E_1 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots \Rightarrow \overline{E_1} \subseteq \dots \subseteq \overline{E_n} \subseteq \dots$$

$$\overset{(e)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{E_n}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{E_i}\Big) \underset{\text{DeMorgan}}{=} \mathbb{P}\Big(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\overline{E_i}}}\Big) = \mathbb{P}\Big(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i}\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{E_n}) = \lim_{n\to\infty}(1 - \mathbb{P}(E_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big)}}$$

In unseren beiden grundlegenden Beispielen ($\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$) haben wir bereits von sinnvolle "wichtige" Teilmengen erzeugten σ-Algebren definiert.

Wie konstruiert man das W-Maßen wir wollen auf $\sigma(\mathcal{W})$?

Schritt 1.: Definieren wir die W-keit $\mathbb{P}^*: \mathcal{W} \to [0,1]$ der "wichtigen" Mengen, wie wir sie wollen (d.h., wie sie unsere Intuition der Situation representieren)

Schritt 2.: Erweitern wir $\mathbb{P}^*$ auf die erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{W})$. Ein schwieriger Satz der Maßtheorie sagt, dies möglich ist, wenn wir mit der Wahl von $\mathcal{W}$ und $\mathbb{P}^*$ vorsichtig waren.

Satz von Carathéodory (Erweiterungssatz) (ohne Beweis)

Wenn (i) $\mathcal{M}$ ein Halbring auf Ω ist und (ii) $\mu^*: \mathcal{M} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ ein Prämaß ist, dann gibt es eine Maß $\mu: \sigma(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ so dass $\forall M \in \mathcal{M}: \mu(M) = \mu^*(M)$

(i) Was ist ein Halbring? (von Mengen; nichts mit dem algebraischen Begriff zu tun.)

- $\emptyset \in \mathcal{M}$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}$ gilt: $A \cap B \in \mathcal{M}$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}$ $\exists$ paarweise disjunkt $C_1, \dots, C_k$ s.d.: $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$

z.B.
- $\mathcal{I}_{ab} = \{(a,b] \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}$ ist ein Halbring auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}_{ab})$ (Hausaufgabe)
- $\mathcal{W} = \left\{ \bigcap_{j \in J} \mathrm{Proj}_j^{-1}(A_j) : J \subseteq I, |J| < \infty, A_j \in \mathcal{E}_j \right\}$ ist ein Halbring auf $\bigtimes_{i \in I} \Omega_i$

(ii) Was ist ein Prämaß?

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$, gilt: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

Unterschied zu Maß: $\mathcal{W}$ ist nicht unbedingt eine σ-Algebra z.B. $\mu^* : {}_o\mathcal{I}_{ab} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$\mu^*([c,d)) := d-c$, $\forall c \le d$, ist ein Prämaß.

Seine Erweiterung ist das sogenannte Lebesgue Maß λ

Da die erzeugte σ-Algebra $\sigma({}_o\mathcal{I}_{ab}) = \mathcal{B}$, (HA!)

definiert λ ein vernünftiges und konsistent Maß

für alle Borel-mengen: $\lambda : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- $\lambda([c,d)) = \mu^*([c,d)) = d-c$, $\forall c<d$, und auch
- λ hat alle schöne Eigenschaften eines Maßes.

---

z.B. $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

Halbring: $\mathcal{W} = \left\{ \bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_j^{-1}(x_j) : J \subseteq \mathbb{N}, |J|<\infty, x_j \in \{0,1\} \, \forall j \in J \right\}$

$\sigma(\mathcal{W}) = \sigma\left(\{ \mathrm{Proj}_j^{-1}(x) : j \in \mathbb{N}, x \in \{0,1\} \} \right)$

Wir möchten das für $\forall J \subseteq \mathbb{N}, |J|<\infty, \forall x_j \in \{0,1\}, j\in J$

- $\mu^*\left(\bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_j^{-1}(x_j) \right) = \frac{1}{2^{|J|}}$

μ^* ist ein Prämaß.

Seine Erweiterung auf $\sigma(\mathcal{W})$ hat alle schöne Eigenschaften wir wollten:

- "Richtige" ("Gleichverteilte") W-keit für jede Rechteckzylinder $\bigcap_{j\in J} \mathrm{Proj}_j^{-1}(x_j)$: W-keit hängt NUR von der Größe von J (und nicht welche J und nicht welche x_j)
- "Unabhängigkeit" von Koordinaten