Erinnerung: Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{C}$

"Kompression von Informationen"

Diskrete Beispiele:

(1). Lotto Unsere Zahlen $M = \{11, 22, 23, 35, 37, 42\}$

Abbildung $Z : \binom{[49]}{6} \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\Omega = \binom{[49]}{6}$

$$\boxed{Z(L) = |L \cap M|}$$ "Anzahl der richtigen Zahlen"

(2)

Zwei faire Würfel geworfen

$\Omega = [6]^2 \quad \left(= \{(x,y) : x,y \in [6]\} \right)$

$Z : [6]^2 \longrightarrow \{2,3,\ldots\ldots,11,12\}$

$$\boxed{Z((x,y)) = x+y}$$ "Augensumme"

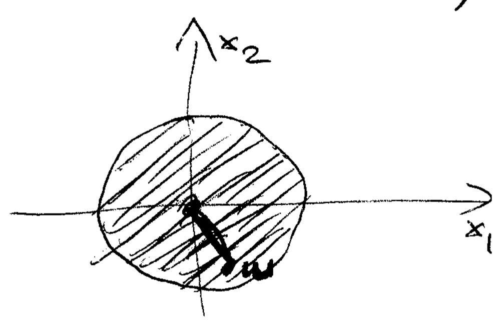
Stetige Beispiel: Im Bertrandsche Paradox interessiert uns NICHT die genaue Lage des Mittelpunkts der Sehne sondern NUR der Abstand zum Nullpunkt.

(3)

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (= Einheitskreisscheibe)

$$\boxed{Z(\omega) = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

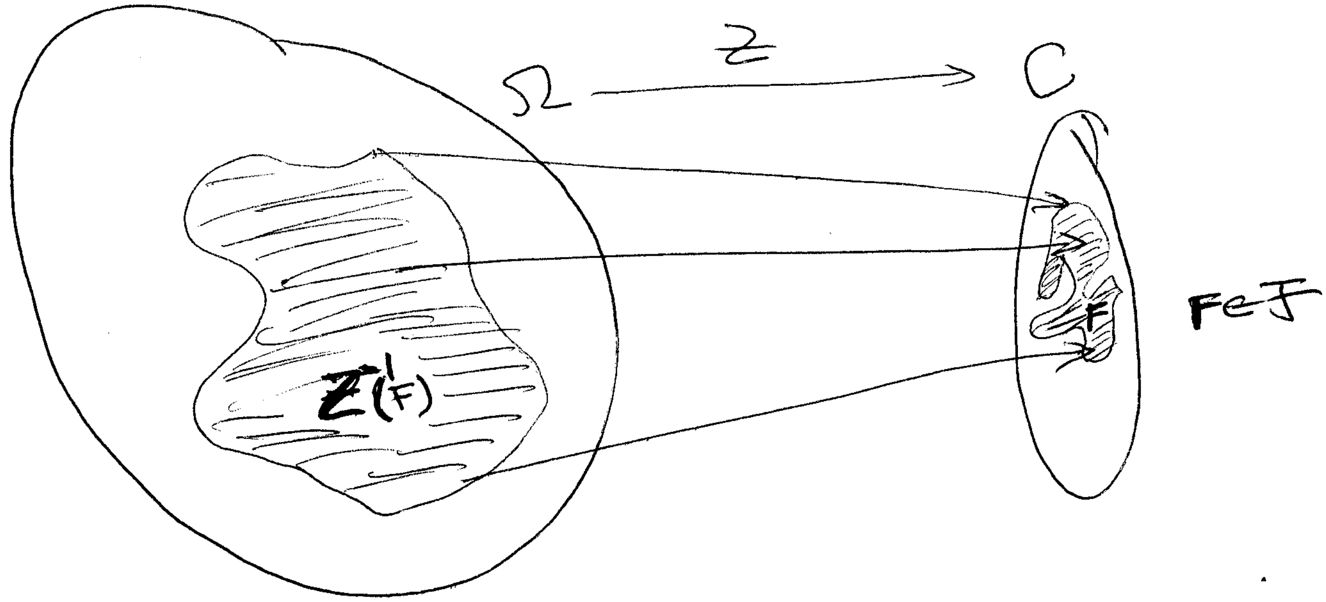
"Abstand zum Nullpunkt"



$Z : \Omega \to [0,1]$ soll ZV sein.

Aber im allgemeinen (nicht diskreten) Fall sollte NICHT jede Funktion ZV sein!

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\qquad\qquad$ $(C, \mathcal{F})$



$\forall F \in \mathcal{F}$ möchten wir die W-keit messen, ~~daß~~ das der Wert von Z in F fällt!!

Def: $(\Omega, \mathcal{E})$ und $(C, \mathcal{F})$ sind Ereignisräume.
Eine Abbildung $Z: \Omega \to C$ ist eine (C-wertige) Zufallsvariable wenn $\forall F \in \mathcal{F}$ gilt: $Z^{-1}(F) \in \mathcal{E}$

Beispiel: Sei $E \subseteq \Omega$ eine Teilmenge.
Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_E : \Omega \to \{0,1\}$

$$\mathbb{1}_E(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \in E \\ 0 & \text{wenn } \omega \in \Omega \setminus E \end{cases}$$

ist eine ZV genau dann wenn $E \in \mathcal{E}$.

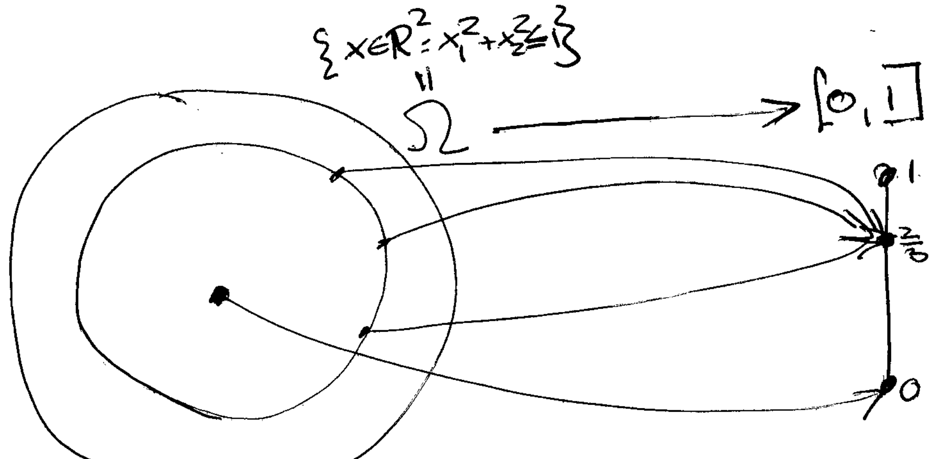
Bemerkung: Hier $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{0,1\})$ ist automatisch angenommen.
(Für jede höchstens abzählbar C, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(C)$)

Beispiel ① Wenn $Z(\Omega)$ höchstens abzählbar ist, dann ist $\mathbb{P}_Z : \mathcal{P}(Z(\Omega)) \longrightarrow [0,1]$ ein diskreter W-Maß.

z.B. $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum, $E \in \mathcal{E}$ Ereignis.

$\Longrightarrow (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), \mathbb{P}_{1_E})$ ist ein Bernoulliraum zum Parameter $\mathbb{P}(E)$.

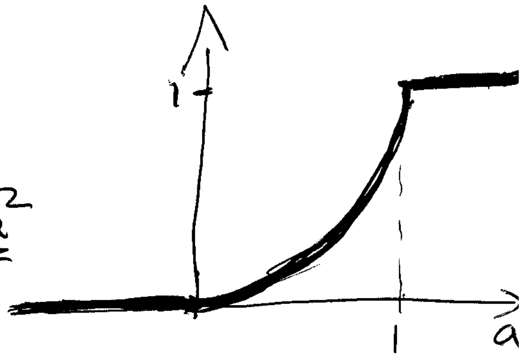
② $\left(Z(x) = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \right)$ Abstand zum Nullpunkt



$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_\Omega \arrow[d, "\text{gleichverteilung } U_\Omega"'] & & \mathcal{B}_{[0,1]} \arrow[ll] \arrow[dll, "\mathbb{P}_Z = ?"] \\
{[0,1]} & &
\end{tikzcd}$$

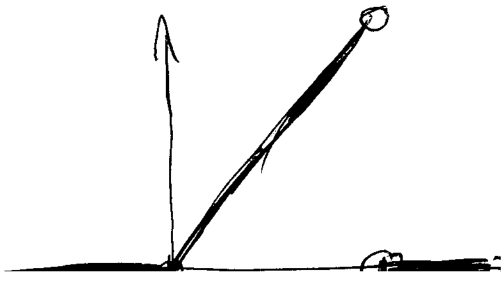
$\forall a \in [0,1]$ $F_Z(a) = \mathbb{P}_Z((-\infty, a]) = U_\Omega(Z \leq a) =$

$= U_\Omega(\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq a\}) = \frac{a^2 \pi}{1^2 \pi} = \underline{\underline{a^2}}$



$\rightsquigarrow$ Dichtefunktion auf $[0,1]$ ist

$$F_Z'(a) = 2a$$



Bemerkung: Wenn $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$, dann reicht es $Z^{-1}(F) \in \mathcal{E}$ nur $\forall F \in \mathcal{G}$ zu checken.

D.h.: $Z : \Omega \to C$ ist ZV $\iff \forall F \in \underline{\underline{\mathcal{G}}} \quad Z^{-1}(F) \in \mathcal{E}$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Per Def von ZV und da $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{F}_Z = \{ F \in \mathcal{F} : Z^{-1}(F) \in \mathcal{E} \}$

Dann • $\mathcal{F}_Z \supseteq \mathcal{G}$

• $\mathcal{F}_Z$ ist eine σ-Algebra (Check!)

$\Rightarrow \mathcal{F}_Z \supseteq \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$ ✓

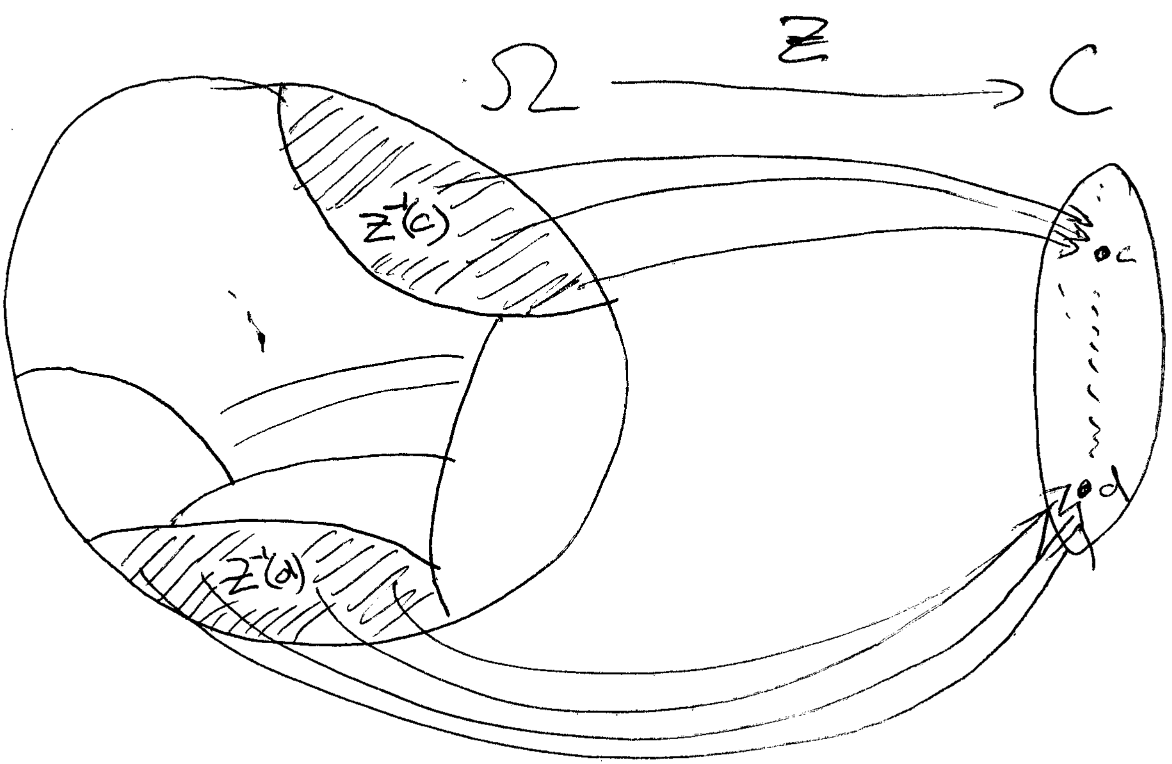
$\boxed{\text{ZB}}$ wenn $\mathcal{F} = \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}_a^{\infty})$ $\quad C = \mathbb{R}$

$Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ZV $\iff \forall a \in \mathbb{R} \quad Z^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{E}$

Korollar: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}^n_\Omega$

$\Rightarrow \forall$ stetige Funktion $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine ZV

Beispiel: Abstand von Nullpunkt IST eine ZV, weil $Z(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist eine stetige Funktion von $\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$ nach $[0,1]$.



$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\Omega) \supseteq \mathcal{E} \arrow[d, "\mathbb{P}"'] & & \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C) \arrow[ll, "Z^{-1}"'] \arrow[dll, "\mathbb{P}_Z = \mathbb{P} \circ Z^{-1}"] \\
{[0,1]} & &
\end{tikzcd}
$$

<u>Satz:</u> Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein W-Raum

$(C, \mathcal{F})$ ein Ereignisraum

$Z : \Omega \longrightarrow C$ eine ZV.

Dann die Abbildung $\mathbb{P}_Z : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$,

definiert durch $\mathbb{P}_Z(F) := \mathbb{P}(\{Z \in F\})$,

ist eine W-Maß auf $(C, \mathcal{F})$.

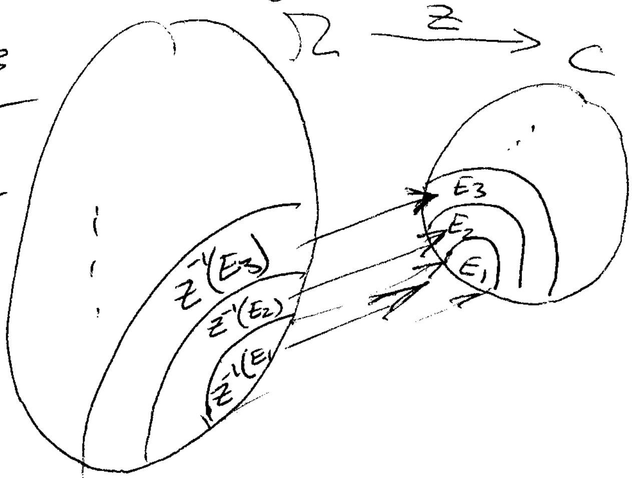
$(C, \mathcal{F}, \mathbb{P}_Z)$ wird der <u>durch Z induzierte W-Raum</u> genannt.

Beweis: • $\mathbb{P}_Z$ ist definiert, weil $\forall F \in \mathcal{F}$
$\{Z \in F\} = Z^{-1}(F) \in \mathcal{E}$, also $\mathbb{P}(\{Z \in F\})$ ist definiert.

• (P1) $\mathbb{P}_Z(C) := \mathbb{P}(\underbrace{\{Z \in C\}}_{= \Omega}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

• (P2) Sei $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ eine disjunkte Folge.

Dann $\{Z \in E_1\}, \{Z \in E_2\}, \dots \in \mathcal{E}$
ist auch eine disjunkte Folge
(andernfalls $\exists\, i, j \in \mathbb{N}$ und
$\omega \in \{Z \in E_i\} \cap \{Z \in E_j\}$,
aber dann $Z(\omega) \in E_i \cap E_j$ ↯)



$$\Rightarrow \mathbb{P}_Z\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\{Z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}}_{\bigcup_{i=1}^{\infty}\{Z \in E_i\}}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{Z \in E_i\}) =: \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_Z(E_i)$$

$\square$

Def: Unter der Verteilungsfunktion $F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$ von einer reelwertigen ZV $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, verstehen wir die Verteilungsfunktion $F_{\mathbb{P}_Z}$.

D.h. $F_Z(a) := F_{\mathbb{P}_Z}(a) = \mathbb{P}_Z((-\infty, a]) = \mathbb{P}(Z \le a)$.

<u>Satz:</u> $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum

$X, Y, X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV

Dann sind auch die folgenden Abbildungen ZV:

(i) $c\cdot X \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(ii) $X + Y$

(iii) $X \cdot Y$

(iv) X/Y falls $Y(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

(v)$_a$ $\sup_n X_n$ [definiert durch $(\sup X_n)(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega), \forall \omega \in \Omega,$

falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) < \infty \quad \forall \omega \in \Omega$]

(v)$_b$ $\inf_n X_n$ [definiert durch $(\inf X_n)(\omega) := \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega), \forall \omega \in \Omega,$

falls $\inf X_n(\omega) > -\infty \quad \forall \omega \in \Omega$]

(vi) $\lim_{n\to\infty} X_n$ [definiert durch $(\lim_{n\to\infty} X_n)(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_n(\omega), \forall \omega \in \Omega,$

falls $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ existiert $\forall \omega \in \Omega$.]

<u>Bemerkung:</u> Ob diese Funktionen ZV waren, war keine Frage wenn Ω diskrete war: dann war JEDE Funktion eine ZV.

Beweis: $\boxed{\text{Wir checken nur dass die Uhrbilder von } (-\infty, a] \text{ in } \mathcal{E} \text{ sind!}}$

(i) • Falls $c > 0$

$$\{cX \le a\} \qquad \{X \le \tfrac{a}{c}\} = X^{-1}\left((-\infty, \tfrac{a}{c}]\right) \in \mathcal{E}$$

$$\{\omega \in \Omega : cX(\omega) \le a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \tfrac{a}{c}\}$$

weil X ZV ist und $(-\infty, \frac{a}{c}] \in \mathcal{B}$

• Falls $c < 0$

$$\{cX \le a\} = \{X \ge \tfrac{a}{c}\} = X^{-1}\left([\tfrac{a}{c}, \infty)\right) \in \mathcal{E}$$

weil X ZV ist und $[\frac{a}{c}, \infty) \in \mathcal{B}$

• Falls $c = 0$

$$\{cX \le a\} = \{0 \le a\} = \begin{cases} \Omega & \text{wenn } a \ge 0 \\ \emptyset & \text{wenn } a < 0 \end{cases} \in \mathcal{E}$$

(ii) $$\{X+Y > a\} = \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \\ p+q > a}} \left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > p\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > q\}\right)$$

$$\omega \in \{X+Y > a\} \Leftrightarrow X(\omega) + Y(\omega) > a \Longleftrightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{Q} \text{ mit } \begin{array}{l} \bullet\ p+q > a \\ \bullet\ X(\omega) > p \\ \bullet\ Y(\omega) > q \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \\ p+q > a}} \left(X^{-1}((p,\infty)) \cap Y^{-1}((q,\infty))\right) \in \mathcal{E}$$

Beweis:

Sei $p \in (x - \frac{\varepsilon}{2}, x)$

$q \in (y - \frac{\varepsilon}{2}, y)$

Abzählbare Vereinigung von Schnitten von Uhrbilder von Borel mengen $(p,\infty) \in \mathcal{B}$ und $(q,\infty) \in \mathcal{B}$

Dann gilt: $\{X+Y \le a\} = \Omega \setminus \{X+Y > a\} \in \mathcal{E}$ ✓

(iii) <u>Erst:</u> Nehmen wir an $X = Y$

Falls $a \geq 0$

$$\{X^2 \leq a\} = \{\omega \in \Omega : (X(\omega))^2 \leq a\} = \{\omega \in \Omega, -\sqrt{a} \leq X(\omega) \leq \sqrt{a}\}$$

$$= X^{-1}([-\sqrt{a}, \sqrt{a}]) \in \mathcal{E}$$

weil X ZV ist und

$[-\sqrt{a}, \sqrt{a}] \in \mathcal{B}$ Borelmenge ist

Falls $a < 0$

$$\{X^2 \leq a\} = \emptyset \in \mathcal{E}$$

<u>Allgemein:</u> $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$$X \cdot Y = \frac{1}{2}\left[(X+Y)^2 - X^2 - Y^2\right]$$

$$\begin{array}{ccc}
X, Y \text{ ZV} & \xRightarrow{(ii)} & X+Y \text{ ist ZV} \xRightarrow{\text{oben}} (X+Y)^2 \text{ ist ZV} \\
\Big\Downarrow \text{oben} & & \Big\Downarrow (i)+(ii) \\
X^2, Y^2 \text{ sind ZV} & \xRightarrow{(i)+(ii)} & \frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 \text{ ist ZV}
\end{array}$$

(iv) $\dfrac{X}{Y} = X \cdot \dfrac{1}{Y}$ ist ZV falls $\dfrac{1}{Y}$ ZV ist (durch (iii))

<u>Falls $a > 0$</u>

$$\left\{\frac{1}{Y} \leq a\right\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) < 0\} \cup \left\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \geq \frac{1}{a}\right\} = Y^{-1}((-\infty, 0)) \cup Y^{-1}\left(\left[\tfrac{1}{a}, \infty\right)\right) \in \mathcal{E}$$

<u>Falls $a = 0$</u>

$$\left\{\frac{1}{Y} \leq 0\right\} = \{Y \leq 0\} = Y^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{E}$$

<u>Falls $a < 0$</u>

$$\left\{\frac{1}{Y} \leq a\right\} = \{Y < 0\} \cap \left\{\frac{1}{a} \leq Y\right\} = Y^{-1}((-\infty, 0)) \cap Y^{-1}\left(\left[\tfrac{1}{a}, \infty\right)\right) \in \mathcal{E}$$

(V)$_a$ Sei $Z(\omega) := \sup_n X_n(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

$$\{Z > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{E}$$

weil $\omega \in \{Z > a\} \Leftrightarrow Z(\omega) > a \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ X_n(\omega) > a$

Def von $\sup X_n(\omega) = Z(\omega)$

Dann $\{Z \leq a\} = \Omega \setminus \{Z > a\} \in \mathcal{E}$ da $\mathcal{E}$ σ-Algebra ist.

(V)$_b$ X_n sind ZV $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ $-X_n$ sind ZV $\overset{(V)_a}{\Longrightarrow}$ $\sup(-X_n)$ ist ZV

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} -(\sup(-X_n)) = \inf X_n$ ist ZV

(Vi)

$$\lim X_n(\omega) = \liminf X_n(\omega) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\inf_{n\geq m} X_n(\omega)\right)$$

weil limes existiert

X_n sind ZV $\overset{(V)_b}{\Longrightarrow} \inf_{n\geq m} X_n =: Z_m$ sind ZV $\forall m \in \mathbb{N}$

$\overset{(V)_a}{\Longrightarrow} \sup_{m\in\mathbb{N}} Z_m$ ist ZV

$\quad\quad \| $

$\lim X_n$

Verallgemeinerung von Unabhängigkeit ZV

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum.

- Bedingte W-keit: $\boxed{A, B \in \mathcal{E}}$ $\mathbb{P}(B) > 0$: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

- $\boxed{A, B \in \mathcal{E}}$ unabhängig wenn $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

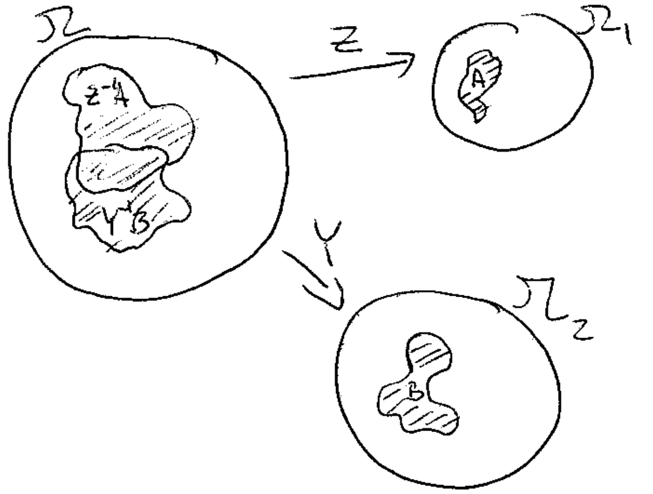
- I: Indexmenge, $\boxed{A_i \in \mathcal{E}}$ $\forall i \in I$

  $\{A_i\}_{i \in I}$ ist unabhängig wenn $\forall J \subseteq I$, $|J| < \infty$

  $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in I} \mathbb{P}(A_j)$$

- Ereignisräume $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$

  ZV $Z: \Omega \to \Omega_1$ und $Y: \Omega \to \Omega_2$ sind unabhängig



$\boxed{\forall A \in \mathcal{F}_1, \forall B \in \mathcal{F}_2}$

$Z^{-1}A \in \mathcal{E}$ und $Y^{-1}B \in \mathcal{E}$ sind unabhängig

- I indexmenge, $\forall i \in I$ $Z_i : \Omega \to \Omega_i$ ist ZV auf Ereignisraum $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$

  $(Z_i)_{i \in I}$ ist unabhängig wenn $\forall$ Wahl $A_i \in \mathcal{F}_i$ $(\forall i \in I)$

  Ereignisse $\{Z_i^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$ ist unabhängig

(D.h. $\forall J \subseteq I$, $|J| < \infty$, und $\forall A_j \in \mathcal{F}_j$ $j \in J$ gilt: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} Z_j^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(Z_j^{-1}(A_j))$)

Erinnerung: Monatseinkommen, Größe der Wohnung,
(Beispiel) Tag der Monat der Geburtstag einer rein zufällig ausgewählte Person.

Satz: (Unabhängigkeitkriterium) I Indexmenge $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum

$Z_i : \Omega \to \Omega_i$ ZV nach Ereignisräume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$

wobei $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{G}_i)$ mit schnitt-stabil $\mathcal{G}_i$

$(Z_i)_{i\in I}$ ist unabhängig $\iff \forall J \subseteq I, |J| < \infty$

$\forall A_j \in \mathcal{G}_j \quad (j \in J)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} Z_j^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j^{-1}(A_j))$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Folgt von $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}_j$ und Def von Unabhängigkeit

$\boxed{\Leftarrow}$ (Sketch) Sei $J \subseteq I$, $|J| < \infty$, $A_i \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in J$

Ziel $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} Z_i^{-1}(A_i)\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(Z_i^{-1}(A_i)) \qquad (*)$$

Induktion nach $k = |\{i \in J : A_i \notin \mathcal{G}_i\}|$ (Anzahl der A_i die NICHT in $\mathcal{G}_i$ sind.)

- $k = 0 \Rightarrow A_i \in \mathcal{G}_i \ \forall i \in J \Rightarrow (*)$ ist die Voraussetzung
- $k > 0$ sei $A_i \in \mathcal{F}_i$ beliebig $\forall i \in J$, sodass $|\{i \in J : A_i \notin \mathcal{G}_i\}| = k$

Wählen wir $j \in J$ mit $A_j \notin \mathcal{G}_j$

Sei $$\mathcal{H} = \left\{ C \in \mathcal{F}_j : \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J\setminus\{j\}} Z_i^{-1}(A_i) \cap Z_j^{-1}(C)\right) = \prod \mathbb{P}(Z_i^{-1}(A_i)) \cdot \mathbb{P}(Z_j^{-1}(C)) \right\}$$

Dann • $\mathcal{H}$ ist ein Dynkin-system (check)

• $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{G}_j$ (Induktion)

$\Rightarrow \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D}(\mathcal{G}_j)$. Aber auch $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_j = \sigma(\mathcal{G}_j) = \mathcal{D}(\mathcal{G}_j)$ da $\mathcal{G}_j$ schnitt-stabil.

$\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{F}_j \Rightarrow A_j \in \mathcal{H}$

Korollar: (Unabhängigkeit von Indikatorvariablen)

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum, I Indexmenge, $A_i \in \mathcal{E}\ \forall i \in I$

$(A_i)_{i\in I}$ ist unabhängig $\Leftrightarrow$ $(1_{A_i})_{i\in I}$ unabhängig

Beweis: $\boxed{\Leftarrow}$ Sei $J \subseteq I$, $|J| < \infty$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} 1_{A_j}^{-1}(1)\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(1_{A_j}^{-1}(1)) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

$1_{A_j}^{-1}(1) = \{\omega \in \Omega : 1_{A_j}(\omega) = 1\} = A_j$

$(1_{A_j})_{j\in J}$ ist unabhängig

$\boxed{\Rightarrow}$ $1_{A_i} : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ ZV nach $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$

$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \sigma(\{\{1\}\})$ wobei $\{1\}$ ist ein schnitt-stabil Erzeuger.

$\boxed{\text{Satz} \Rightarrow}$ $(1_{A_i})_{i\in I}$ unabhängig $\Leftrightarrow$ $\forall J \subseteq I, |J| < \infty$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} 1_{A_j}^{-1}(\{1\})\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(1_{A_j}^{-1}(\{1\}))$$

Einzige Element der schnitt-stabil Erzeuger

Aber es ist so, weil

Linke Seite $= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)$

$\parallel \leftarrow (A_j)_{j\in J}$ ist unabhängig

Rechte Seite $= \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$

<u>Korollar</u>: • $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum

• $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ Ereignisräume $\forall i=1,\dots,n$

• $Z_i : \Omega \to \Omega_i$ ZV $\forall i=1,\dots,n$

(a) (Diskreter Fall) $\forall i\in[n]$ $\begin{cases} \Omega_i \text{ ist höchstens abzählbar} \\ \mathcal{F}_i = \mathcal{P}(\Omega_i) \end{cases}$

$(Z_i)_{i\in[n]}$ ist unabhängig $\Leftrightarrow$ $\forall \omega_i \in \Omega_i$ $(i\in[n])$

$$\mathbb{P}(Z_1=\omega_1,\dots,Z_n=\omega_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Z_i=\omega_i)$$

(b) (Reeler Fall) $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}$ $\forall i\in[n]$

$(Z_i)_{i\in[n]}$ ist unabhängig $\Leftrightarrow$ $\forall c_i \in \mathbb{R}$ $(i\in[n])$

$$\mathbb{P}(Z_1\le c_1,\dots,Z_n\le c_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Z_i\le c_i)$$

<u>Beweis</u>: $\boxed{\Rightarrow (a)(b)}$ Spezialfall der Def von Unabhängigkeit von $(Z_i)_{i\in[n]}$

Benutzt mit (a) $A_i = \{\omega_i\} \in \mathcal{F}_i$

(b) $A_i = (-\infty, c_i] \in \mathcal{B} = \mathcal{F}_i$

$\boxed{\Leftarrow (a)}$ $\mathcal{G}_i = \{\{\omega\} : \omega\in\Omega_i\} \cup \{\emptyset\}$ ist ein schnitt-stabil Erzeuger von $\mathcal{F}_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$

$\forall J\subseteq[n]$ Es reicht $\forall A_j \in \mathcal{G}_j$ $\mathbb{P}(\bigcap Z_j^{-1}(A_j)) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j^{-1}(A_j))$ zu checken

, wenn eine der $A_j = \emptyset$, dann $Z_j^{-1}(A_j) = \emptyset \Rightarrow$ beide Seiten sind 0 ✓

Andernfalls $A_j = \{\alpha_j\}$ für ein $\alpha_j \in \Omega_j$ $\forall j\in J$ Dann

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} Z_j^{-1}(A_j)\Big) = \mathbb{P}\Big(\dot{\bigcup_{\omega\in \times_{i\in I\setminus J}\Omega_i}} \{Z_i=\omega_i : \forall i\in I\setminus J\} \cap \{Z_j=\alpha_j : \forall j\in J\}\Big)$$

$$\sum_{\omega\in \times_{i\in I\setminus J}\Omega_i} \mathbb{P}\big(\{Z_i=\omega_i : \forall i\in I\setminus J\} \cap \{Z_j=\alpha_j : \forall j\in J\}\big) = \sum_{\omega\in \times_{i\in I\setminus J}\Omega_i} \prod_{i\in I\setminus J} \mathbb{P}(Z_i=\omega_i) \cdot \prod_{j\in J}\mathbb{P}(Z_j=\alpha_j)$$

$$= \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j = \alpha_j) \cdot \prod_{i\in[n]\setminus J} \underbrace{\left(\sum_{\omega_i\in\Omega_i} \mathbb{P}(Z_i=\omega_i)\right)}_{=1} = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j=\alpha_j)$$

$$= \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j^{-1}(A_j))$$

$\boxed{\Leftarrow (b)}$ $\mathcal{G}_i = \{(-\infty,c] : c\in\mathbb{R}\}$ ist ein schnitt-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}$.

$\forall J\subseteq[n]$ reicht es $\forall A_j\in\mathcal{G}_j$ $\left(A_j = (-\infty,c_j]\right)$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} Z_j^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j^{-1}(A_j))$ zu checken

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} Z_j^{-1}(A_j)\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : Z_j(\omega)\le c_j \ \forall j\in J\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\underbrace{\left(\{Z_i\le m : \forall i\in[n]\setminus J\}\cap\{Z_j\le c_j : \forall j\in J\}\right)}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Stetigkeit} \\ \text{von unten}}}{=} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\quad \right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \prod_{i\in[n]\setminus J} \mathbb{P}(Z_i\le m)\cdot\prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j\le c_j) =$$

$$= \prod_{i\in[n]\setminus J} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(Z_i\le m) \cdot \prod \mathbb{P}(Z_j\le c_j)$$

$$= \prod_{i\in[n]\setminus J} \underbrace{\mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{m=1}^{\infty}\{Z_i\le m\}}_{=\Omega}\Big)}_{=1}\cdot \prod \mathbb{P}(Z_j\le c_j)$$

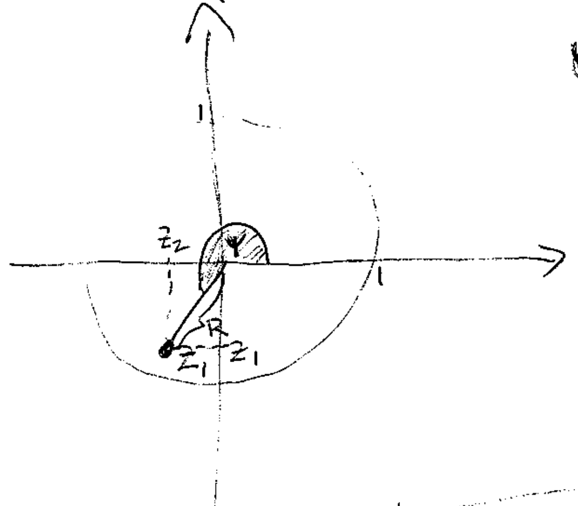
$$= \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j\le c_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Z_j^{-1}(A_j))$$

Beispiel (Polarkoordinaten eines gleichverteilten Punktes der Kreisscheibe)

$K = \{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$ $\mathcal{B}_K$ $\mathcal{U}_K : \mathcal{B}_K \to [0,1]$

Sei $Z = (Z_1, Z_2)$ ein Punkt durch $\mathcal{U}_K$ gewählt.

~~$Z = (Z_1, Z_2)$~~ ZV $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ $R \in (0, 1]$



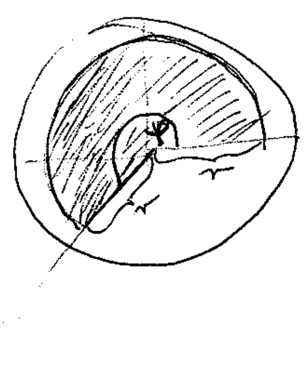
Ψ = Winkel zwischen der positive Halbachse und der Strecke von O nach Z)

$\Psi \in [0, 2\pi)$

Behauptung: $\boxed{R \text{ und } \Psi \text{ sind unabhängig}}$

Sei $r \in (0, 1]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ beliebig

$$\mathcal{U}_K(R \leq r, \Psi \leq \varphi) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi}{2\pi}}{1^2 \cdot \pi} = \frac{r^2 \pi}{1^2 \pi} \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = \mathcal{U}_K(R \leq r) \cdot \mathcal{U}_K(\Psi \leq \varphi)$$



Auch: R^2 ist gleichverteilt auf $(0, 1]$

Ψ — " — $[0, 2\pi)$

Produkt σ-Algebra

Erinnerung:

Produkt σ-Algebra: $I \neq \emptyset$ ist eine Indexmenge

- $\forall i \in I$ $(\Omega_i, \mathcal{E}_i)$ sind Ereignisräume

Die Produkt σ-Algebra $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i$ ist auf die Menge

$\boxed{\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i}$ ($= \{(e_i)_{i\in I} : e_i \in \Omega_i\}$ das kartesische Produkt von den Ω_i)

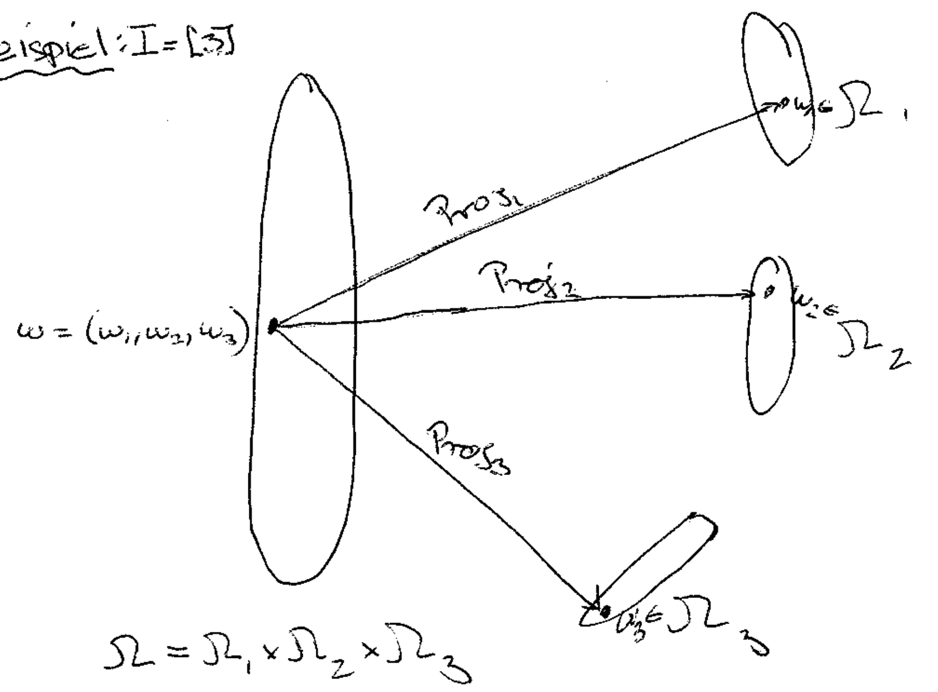
definiert.

$W_1 = \{\mathrm{Proj}_i^{-1}(A) : i \in I\ A \in \mathcal{E}_i\}$

erzeugte σ-Algebra: $\boxed{\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i = \sigma(W_1)}$

(wobei $\mathrm{Proj}_i : \Omega \to \Omega_i$ ist durch $\mathrm{Proj}_i(\omega) = \omega_i$, $\forall \omega \in \Omega$, definiert

Beispiel: $I = [3]$



Bemerkung: Definition macht jede Projektion eine ZV, (da Urbilder von messbaren $A \in \mathcal{E}_i$ sind alle in W_1)

Beispiele: $\forall$ Ω_i höchstens abzählbar, $\mathcal{E}_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$, $|I| < \infty$

$\Rightarrow \bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i = \mathcal{P}(\Omega)$

- $I = [n]$ $\Omega_i = \mathbb{R}$ $\mathcal{E}_i = \mathcal{B}$ $\forall i \in [n]$

$\boxed{\text{HA:}}$ $\mathcal{B}^{\otimes n} = \mathcal{B}^n$

Produkt W-Maß

Satz
- $I \neq \emptyset$ ist eine Indexmenge
- $\forall i \in I$ $(\Omega_i, \mathcal{E}_i, \mathbb{P}_i)$ sind W-Räume

Dann existiert genau ein W-Maß $\mathbb{P} = \bigotimes_{i\in I} \mathbb{P}_i$ auf $\left(\times_{i\in I}\Omega_i, \bigotimes_{i\in I}\mathcal{E}_i\right)$ für welches gilt:

(1) $\forall i \in I$ $\mathbb{P}_{Proj_i} = \mathbb{P}_i$ (d.h. ZV $Proj_i : \Omega \to \Omega_i$ hat Verteilung $\mathbb{P}_i$)

(2) $\{Proj_i\}_{i\in I}$ ist unabhängig

Beweis: (Sketch)
- $\mathcal{W} = \left\{ \bigcap_{j\in J} Proj_j^{-1}(A_j) : J \subseteq I, |J| < \infty \right\}$, $\forall A_j \in \mathcal{E}_j\ \forall j \in J$ ist ein Halbring auf $\times_{i\in I}\Omega_i$
- $\forall J \subseteq I, |J| < \infty$ $\forall A_j \in \mathcal{E}_j$ $(j \in J)$

$$\mu^*\left(\bigcap_{j\in J} Proj_j^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}_j(A_j)$$

- $\sigma(\mathcal{W}) = \sigma(\mathcal{W}_1) = \bigotimes_{i\in I}\mathcal{E}_i$
- $\mathcal{W}$ ist schnitt-stabil

$\mu^* : \mathcal{W} \to [0,1]$ ist ein Prämaß.

$\underset{\text{Caratheodory}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ W-Maß $\mathbb{P} : \sigma(\mathcal{W}) \to [0,1]$ mit $\mathbb{P}|_{\mathcal{W}} = \mu^*$

Dann (1) $\mathbb{P}_{Proj_i}(B) = \mathbb{P}(Proj_i^{-1}(B)) = \mu^*(Proj_i^{-1}(B)) = \mathbb{P}_i(B)$ $\forall B \in \mathcal{E}_i$

(2) $\forall J \subseteq I, |J| < \infty$ und $\forall A_j \in \mathcal{E}_j$ $(\forall j \in J)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} Proj_j^{-1}(A_j)\right) = \mu^*\left(\bigcap_{j\in J} Proj_j^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}_j(A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(Proj_j^{-1}(A_j)\right)$$

Da $\mathcal{W}$ schnitt-stabil ist
$\mathbb{P}$ ist eindeutig.

Beispiel 1: Kanonisches Produktmodell

Sei $I=\mathbb{N}$ und $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i) = (E, \mathcal{E}, Q)$ $\forall i\in\mathbb{N}$

Der Produktraum $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}}, Q^{\otimes\mathbb{N}})$ ist das kanonisches Modell für die unendliche unabhängige Wiederholung eines Zufallexperiment, das durch $(E,\mathcal{E},Q)$ beschrieben wird. Die Projektionsvariablen Proj_i beschreiben die Einzelexperimente. Sie sind unabhängig und haben Verteilung Q.

Spezialfall: $E=\{0,1\}$, $\mathcal{E}=\mathcal{P}(E)$, $Q(\{1\})=p\in(0,1)$.

Dann $Q^{\otimes\mathbb{N}}$ heißt das unendliche Bernoullimaß auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ zur Erfolgswahrscheinlichkeits p.

Endlich! Geometrische Verteilung ist präzis:

$$\omega \longmapsto Z(\omega)=\min\{i : \omega_i = 1\}$$

$$\begin{tikzcd}
\{0,1\}^{\mathbb{N}} \arrow[rr, "Z"] & & \mathbb{N} \\
(\mathcal{P}(\{0,1\}))^{\otimes\mathbb{N}} \arrow[d, "(\mathrm{ber}_p)^{\otimes\mathbb{N}}"'] & & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \arrow[ll, "Z^{-1}"'] \arrow[dll, dashed] \\
{[0,1]} & &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_Z = g_{1-p}} \text{ weil } \mathbb{P}_Z(i) = (\mathrm{ber}_p)^{\otimes\mathbb{N}}(Z^{-1}(i))$$

$$= (\mathrm{ber}_p)^{\otimes\mathbb{N}}\big(\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{i-1}\times\{1\}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\big)$$

(1) Projektionen sind Bernoulli verteilt

$$= \mathrm{ber}_p(0)\cdot\ldots\cdot\mathrm{ber}_p(0)\cdot\mathrm{ber}_p(1)$$

(2) Projektionen sind unabhängig

$$= (1-p)^{i-1}\cdot p = g_{1-p}(i)$$

<u>Beispiel</u>. $I = [n]$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_i)$ W-Räume mit Dichte $\rho_i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

Dann das Produktmaß $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ $\left(\mathcal{B}^n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}\right)$

hat die Dichtefunktion

$$\rho(x) = \prod_{i=1}^{n} \rho_i(x_i) \quad \forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Tatsächlich: $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Proj}_{J_1} \le c_1, \dots, \mathrm{Proj}_{J_n} \le c_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i((-\infty, c_i])$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{c_i} \rho_i(x_i)\,dx_i = \int_{-\infty}^{c_1} \dots \int_{-\infty}^{c_n} \rho_1(x_1) \cdots \rho_n(x_n)\,dx_1 \dots dx_n$$

$$\underset{\text{Fubini Satz}}{=} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n :\, \mathrm{Proj}_{J_1}(x) \le c_1, \dots, \mathrm{Proj}_{J_n}(x) \le c_n\}} \rho(x)\,dx$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz

$$\mathbb{P}(B) = \int_B \rho(x)\,dx \quad \forall B \in \mathcal{B}^n$$

da $\left\{ \bigtimes_{i=1}^{n} (-\infty, c_i) : c_i \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein schnitt-stabil Erzeuger von $\mathcal{B}^n$ ist.

Verteilung von Summen unabhängiger ZV

Satz: $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein W-Raum

$Z, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV mit abzählbaren $|Z(\Omega)|$ und $|Y(\Omega)|$

Dann $\forall z \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{P}_{Z+Y}(\{z\}) = \sum_{\substack{x \in Z(\Omega),\, y \in Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}_Z(\{x\}) \cdot \mathbb{P}_Y(\{y\})$$

Beweis:
$$\mathbb{P}_{Z+Y}(z) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) + Y(\omega) = z\}\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{\substack{x \in Z(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ x+y=z}}} \{\omega \in \Omega : Z(\omega) = x, Y(\omega) = y\} \right)$$
$$= \sum_{\substack{x \in Z(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}(\{Z = x, Y = y\})$$
$$= \sum_{\substack{x \in Z(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}(Z = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$$
$$= \sum \mathbb{P}_Z(\{x\}) \cdot \mathbb{P}_Y(\{y\})$$

Bemerkung: Die Folge $(p_0 q_0, p_1 q_0 + p_0 q_1, \dots, \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}, \dots)$ heißt die diskrete Faltung der Folgen $(p_0, p_1, \dots)$ und $(q_0, q_1, \dots)$. Es beschreibt die Verteilung der Summe von unabhängigen ZV mit Verteilung $(q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$.

Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein W-Raum

$Z, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV

Für $\mathbb{P}_Z$ existiert Dichtefn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{P}_Y$ — " — $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dann $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f*g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot g(z-s)\, ds \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

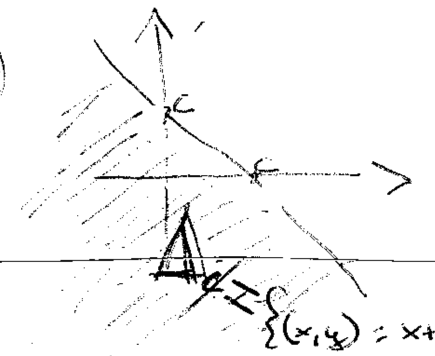
ist die Dichtefn von $\mathbb{P}_{Z+Y}$.

Beweis: $(Z, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist eine ZV mit Dichte $f(x) \cdot g(y)$

$$\underline{\underline{\mathbb{P}_{Z+Y}(c)}} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) + Y(\omega) \leq c\})$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (Z(\omega), Y(\omega)) \in \Delta_c\})$$

$$= \mathbb{P}_{(Z,Y)}(\Delta_c)$$



$\Delta_c = \{(x,y) : x+y \leq c\}$

$$= \int_{\Delta_c} f(x) \cdot g(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R} \times (-\infty, c]} f(s) \cdot g(t-s)\, |\det J|\, ds\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(t-s)\, ds \right) dt$$

$$= \underline{\underline{\int_{-\infty}^{c} (f*g)(t)\, dt}}$$

Substitute

$(x, y) = (s, t-s)$

Jacobi matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \det = 1$

$(x,y) \in \Delta_c \Leftrightarrow s + \underbrace{t - s}_{=t} \leq c$

$\Leftrightarrow (s, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, c]$