Bedingte W-keit

Black Jack: Sie ziehen Karten eins nach dem anderen von einem gemischten Deck von 6mal 52 = 312 Karten. Wenn ich die verschiedene Karte zähle, und z.B. nach 121 Karten weiß ich, dass es noch 14 Königs gibt, aber nur 9 2s, dann weiß ich, dass die W-keit, dass die nächste Karte König ist viel größer als die W-keit dass es 2 ist. Dann kann ich diese Information zu meinen Vorteil nutzen und meine Gewinnchance deutlich erhöhen. (Films: "Rain Man", "21", ...)

Urne mit R rot und B blau Kugel

2 Ziehen, ohne Zurücklegen, Ergebnis: mit Reihenfolge

$$\Omega = [R+B]^{\underline{2}} := \{(x,y) : 1 \le x, y \le R+B,\ x \neq y\}$$

$A = \{(x,y) \in \Omega : 1 \le x \le R\}$ "Erste Kugel ist rot."

$B = \{(x,y) \in \Omega : 1 \le y \le R\}$ "Zweite Kugel ist rot."

Bevor Experiment: $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{R(R+B-1)}{(R+B)(R+B-1)} = \underline{\frac{R}{R+B}}$

Anzahl mögliche zweite Koordinate (muß ROT sein!)

Anzahl mögliche erste Koordinate NACH die zweite ausgewählt ist.

- Nehmen wir jetzt an, dass wir wissen, dass die erste Kugel rot ist. Was ist dann die W-keit von B? Die gleiche?

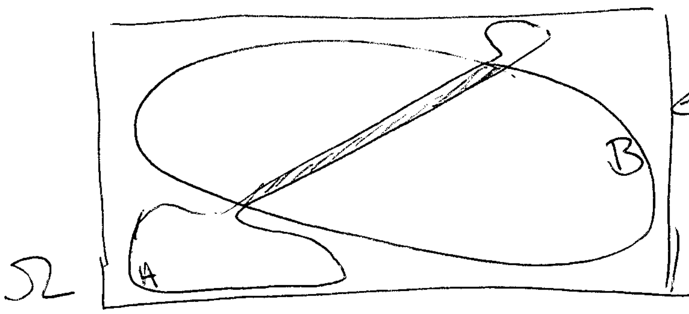
NEIN: $R-1$ → Anzahl "günstige" zweite Koordinate (erste rot ist nicht möglich)

$R+B-1$ → Anzahl alle mögliche

$$\boxed{\frac{R-1}{R+B-1} < \frac{R}{R+B}}$$ "Information verändert W-keit"

Def: Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreten W-Raum, $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, wobei $\boxed{\mathbb{P}(B) > 0}$.

Die bedingte W-keit von A unter Bedingung B ist
$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$



$\mathbb{P}(A)$ larger als $\mathbb{P}(A|B)$

Beispiel: "Augensumme von 2 Würfel"

$\Omega = [6]^2 \qquad \mathbb{P} =$ gleichverteilung auf Ω.

$A =$ "Summe ist ≥ 10" $= \{(x,y) \in \Omega : x+y \geq 10\}$
$= \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Für $i \in [6]$
$B_i =$ "erste Würfel ist NICHT i" $= \{(x,y) \in \Omega : x \neq i\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_i) = \frac{5 \cdot 6}{36} = \frac{5}{6}$$

- $i=3 \rightsquigarrow B_3 \cap A = A \Rightarrow \mathbb{P}(A|B_3) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

  Das Auftreten von B_3 macht A wahrscheinlicher

- $i=4 \rightsquigarrow \mathbb{P}(A|B_4) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_4)} = \frac{|\{(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}|}{5 \cdot 6} = \frac{5}{5 \cdot 6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

  Das Auftreten von B_4 ändert die W-keit von A <u>NICHT</u>

- $i=5 \rightsquigarrow \mathbb{P}(A|B_5) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_5)}{\mathbb{P}(B_5)} = \frac{|\{(4,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}|}{5 \cdot 6} = \frac{4}{5 \cdot 6} < \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

Mehr Beispiele:

- $\mathbb{P}(B_3 | A) = \frac{\mathbb{P}(B_3 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

  ⇝ "Wenn A auftritt, dann tritt auch B_3 auf"

Im Allgemeinen: Wenn $\boxed{E \subseteq F \subseteq \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(F|E) = 1}$

- $\mathbb{P}(B_4 | A) = \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{5/36}{6/36} = \frac{5}{6} = \mathbb{P}(B_4)$

  Das Auftreten von A ändert die W-keit von B_4 NICHT.

Def: Zwei Ereignissen $E, F \subseteq \Omega$ in einem diskreten W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ heißen *unabhängig* wenn

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$$

B_4 und A sind unabhängig.

Behauptung: $E, F \subseteq \Omega$, $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F) > 0$

E und F unabhängig $\Leftrightarrow \mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E) \Leftrightarrow \mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(F)$

- $\mathbb{P}(B_4 \cup B_5 \cup B_6 | A) = \frac{\mathbb{P}((B_4 \cup B_5 \cup B_6) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(A)} = \underline{\underline{0}}$

Im Allgemeinen: Wenn $\boxed{E \cap F = \emptyset, \text{ dann gilt: } \mathbb{P}(E|F) = 0}$

"Wenn F passiert, dann E ist ausgeschossen ist."

Bemerkungen:
- $\emptyset$ und Ω sind unabhängig von $\forall E \subseteq \Omega$
- Wenn $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F) > 0$ und $E \cap F = \emptyset$, dann E und F sind NICHT unabhängig. (Das Auftreten von einem verringert die W-keit des andere zu Null.)

Satz von der totalen W-keit: (W-keitsrechnen durch Fallunterscheidung)

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter W-Raum, I höchstens abzählbar Menge

Sei $B_i \subseteq \Omega$ $\forall i \in I$ so dass
- $\mathbb{P}(B_i) > 0$ $\forall i \in I$

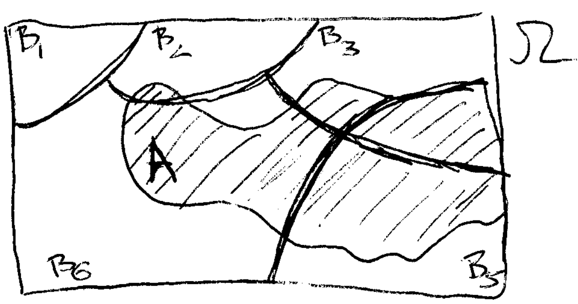
$(B_i)_{i\in I}$ ist eine Partition von Ω $\begin{cases} B_i \cap B_j = \emptyset & \forall i \neq j,\ i,j \in I \\ \bigcup_{i\in I} B_i = \Omega \end{cases}$

Dann gilt: $\forall A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

Beweis:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup B_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)\right) \overset{\substack{\text{weil } I \text{ höchstens} \\ \text{abzählbar ist}}}{=\!=} \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)$$



Bemerkung: Der Satz ist die Summenregel der W-theorie.
Wenn die Berechnung der W-keit eines Ereignisses A schwierig ist:
Klassifizieren wir die Elemente von Ω in $B_1, \ldots, B_n$,
so dass zusammen mit Bedingung B_i die W-keit von A
ist einfacher zu rechnen. ("Divide et impera")

$\mathbb{P}(B_{i_0}|A)$ durch die $\mathbb{P}(A|B_i)$ berechnen:

Satz von Bayes:

Es seien Ω, $\mathbb{P}$, I, $(B_i)_{i\in I}$ wie im Satz von TW.

Dann für $\forall$ Ereignis $A \subseteq \Omega$ $\boxed{\text{mit } \mathbb{P}(A)>0}$ und $\forall$ Index $i_0 \in I$

gilt:
$$\mathbb{P}(B_{i_0}|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_{i_0})\cdot\mathbb{P}(B_{i_0})}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A|B_i)\cdot\mathbb{P}(B_i)}$$

Beweis:

$$\mathbb{P}(B_{i_0}|A) = \frac{\mathbb{P}(B_{i_0}\cap A)}{\mathbb{P}(A)} \underset{\text{Satz der TW}}{=} \frac{\overbrace{\mathbb{P}(B_{i_0}\cap A)}^{=\mathbb{P}(A|B_{i_0})\cdot\mathbb{P}(B_{i_0})}}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A|B_i)\cdot\mathbb{P}(B_i)}$$

$\square$

Beispiel aus der Medizin

Es gibt eine Krankheit K

Es gibt ein Test T, um herauszufinden ob eine Person K hat.

Wir wissen: • 0.3% der Bevölkerung hat K

Güteeigenschaften des Tests:

- Sensitivität des Tests: 99%
  (Mit welcher W-keit wird eine kranke Person als krank erkennt?)
- Spezifität des Tests: 98%
  (Mit welcher W-keit wird eine gesunde Person als "gesund" klassifiziert?)

Dies scheint ein sehr effektiver Test.

Sagen wir ich bekomme ein positives Testergebnis ("Krankheit")
Wie wahrscheinlich ist es, daß ich wirklich krank bin?

Ω = Bevölkerung Laplaceraum

$B \subseteq \Omega$: kranke Personen

$A \subseteq \Omega$: Testpositive Personen

- $\mathbb{P}(B) = 0{,}003$
- $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}99$
- $\mathbb{P}(\bar{A} \mid \bar{B}) = 0{,}98$

Bayes mit $B_1 = B$ und $B_2 = \Omega \setminus B$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid \bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}003}{0{,}99 \cdot 0{,}003 + 0{,}02 \cdot 0{,}997}$$

$\approx 0{,}129$ NUR!

WARUM?