Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

("Die Kombination von Informationen kann zu neuen Informationen führen")

__Beispiel__: Zwei Münzen werden geworfen.

Ereignissen: A: Die zwei Münze zeigen verschiedene Seiten

B_1: Die erste Münze zeigt Kopf

B_2: Die zweite Münze zeigt Zahl

__Dann__ A ist unabhängig von B_1 : $\underbrace{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B_1)}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \mathbb{P}(\underbrace{A\cap B_1}_{\{(\text{Kopf}, \text{Zahl})\}}) = \frac{1}{4}$

A ist unabhängig von B_2 =

B_1 ist unabhängig von B_2 : $\mathbb{P}(B_1)\cdot\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$

__Aber__ B_1 und B_2 bestimmen A!

wenn die beide: B_1 UND B_2 auftreten $\Rightarrow$ auch A auftritt!

$B_1 \cap B_2$ und A sind NICHT unabhängig weil $B_1 \cap B_2 \subseteq A$

(so $\mathbb{P}(B_1\cap B_2 \cap A) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(B_1\cap B_2)\,\mathbb{P}(A)$)

__Also__: Alle zwei der Ereignisse A, B_1, und B_2 sind unabhängig, aber irgendwie sind die "Menge" aller drei Ereignisse "zusammen" NICHT.

__Def__: $(\Omega, \mathbb{P})$: diskrete W-Raum

I: beliebige Indexmenge

Eine Menge $\{E_i : i\in I\}$ von Ereignissen $E_i \subseteq \Omega$ heißt unabhängig wenn für $\forall\, J\subseteq I$, $|J|<\infty$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in J} E_i\Big) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(E_i)$$

Verallgemeinerung: Unabhängigkeit von ZVen

Beispiel! Zufällig ausgewählte Person Q:

- X: Monatseinkommen von Q (in ganze €)
- Y: Größe der Wohnung von Q (in ganze m^2)
- Z: Tag der Monat der Geburtstag von Q

X, Y, Z sind alle diskrete ZV auf Ω = Menschen der Welt/Berlin

Wir glauben:

- Information über den Wert von X auch gibt Information über den Wert von Y.
- Information über den Wert von Z gibt kein Information über den Wert von Y.

Also: "Z und Y sind unabhängig", "X und Y sind nicht unabhängig"

Def: $(\Omega, \mathbb{P})$: diskrete W-Raum.
ZVe $Z: \Omega \to \Omega_1$ und $Y: \Omega \to \Omega_2$ heißen unabhängig wenn $\forall\, \omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$ die Ereignisse $\{Z = \omega_1\}$ und $\{Y = \omega_2\}$ sind unabhängig

(d.h. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = \omega_1, Y(\omega) = \omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = \omega_1\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = \omega_2\})$)

<u>Beispiel:</u> $E_1, E_2 \subseteq \Omega \qquad \chi_{E_1}, \chi_{E_2} : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$

χ_{E_1} und χ_{E_2} sind unabhängig $\Leftrightarrow$ E_1 und E_2 sind unabhängig

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbb{P}(E_1)\cdot\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\chi_{E_1}=1)\cdot\mathbb{P}(\chi_{E_2}=1) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(\{\chi_{E_1}=1\}\cap\{\chi_{E_2}=1\}) = \mathbb{P}(E_1\cap E_2)$

χ_{E_1} und χ_{E_2} unabhängig

$\boxed{\Leftarrow}$ $\omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}$

• $\omega_1=1, \omega_2=1$ $\mathbb{P}(\{\chi_{E_1}=1\}\cap\{\chi_{E_2}=1\}) = \mathbb{P}(E_1\cap E_2) = \mathbb{P}(E_1)\cdot\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\{\chi_{E_1}=1\})\cdot\mathbb{P}(\{\chi_{E_2}=1\})$ •

• $\omega_1=1, \omega_2=0$ $\mathbb{P}(\{E_1=1\}\cap\{\chi_{E_2}=0\}) = \mathbb{P}(E_1\cap\overline{E}_2) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1\cap E_2) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$

• ($\omega_1=0, \omega_2=1$ ist gleich)

weil $E_1 = (E_1\cap\overline{E}_2)\uplus(E_1\cap E_2)$ ist eine Partition von E_1

E_1 und E_2 sind unabhängig

$= \mathbb{P}(E_1)(1-\mathbb{P}(E_2)) = \mathbb{P}(E_1)\cdot\mathbb{P}(\overline{E}_2) = \mathbb{P}(\chi_{E_1}=1)\cdot\mathbb{P}(\chi_{E_2}=0)$ •

• ($\omega_1=0, \omega_2=0$) $\mathbb{P}(\{E_1=0\}\cap\{E_2=0\}) = \mathbb{P}(\overline{E}_1\cap\overline{E}_2) = 1-\mathbb{P}(E_1)-\mathbb{P}(E_2)+\mathbb{P}(E_1\cap E_2) = 1-\mathbb{P}(E_1)-\mathbb{P}(E_2)+\mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$

$= (1-\mathbb{P}(E_1))\cdot(1-\mathbb{P}(E_2))$

$= \mathbb{P}(\overline{E}_1)\cdot\mathbb{P}(\overline{E}_2)$

$= \mathbb{P}(\chi_{E_1}=0)\cdot\mathbb{P}(\chi_{E_2}=0)$ •

<u>Def</u>: (Unabhängigkeit von mehrere ZV)

$(\Omega, \mathbb{P})$: diskrete W-Raum

$I \neq \emptyset$: beliebige Indexmenge

$Y_i : \Omega \to \Omega_i$: ZV für $\forall i \in I$

Die Menge $\{Y_i : i\in I\}$ von ZVen heißt unabhängig wenn für beliebige Wahl von Elementarereignissen $\omega_i \in \Omega_i$ die Menge $\{\{Y_i=\omega_i\} : i\in I\}$ von Ereignissen unabhängig ist.

<u>Bemerkung</u>: Das heißt: $\forall$ jede <u>endliche</u> Teilmenge $J\subseteq I$ von Indizes und $\forall\, \omega_j \in \Omega_j$ (mit $j\in J$)

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J}\{Y_j=\omega_j\}\Big) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(Y_j=\omega_j)$$

Beispiel: $\boxed{\text{Produktmaß}}$

Def: $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ diskrete W-Räume

Definieren wir den Produktraum $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)$:

$$\forall (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega_1, \ldots, \omega_n) := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i(\omega_i)$$

Produktmaß

Check: $\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$ ist wirklich eines W-Maß auf $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ (d.h. $\sum_{\omega \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = 1$). Spezialfall des folgendes:

Lemma: $\forall J \subseteq [n]$, $\forall \alpha_j \in \Omega_j \; (j \in J)$

$$\sum_{\omega \in C_1 \times \ldots \times C_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}_j(\alpha_j) \quad \text{wobei } C_j := \begin{cases} \{\alpha_j\} & \text{wenn } j \in J \\ \Omega_j & \text{wenn } j \notin J \end{cases}$$

Für $J = \emptyset$: $\sum_{\omega \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = \prod_{j \in \emptyset} \mathbb{P}_j(\alpha_j) \underset{\text{Leeres Produkt}}{=} 1$

Beweis des Lemmas:

$$\sum_{\omega \in C_1 \times \ldots \times C_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) = \sum_{\omega_1 \in C_1} \ldots \sum_{\omega_n \in C_n} (\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega_1, \ldots, \omega_n) =$$

Def von $\mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$

$$= \sum_{\omega_1 \in C_1} \ldots \sum_{\omega_n \in C_n} \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n(\omega_n) =$$

$$= \left(\sum_{\omega_1 \in C_1} \mathbb{P}_1(\omega_1) \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{\omega_n \in C_n} \mathbb{P}_n(\omega_n) \right) =$$

$$= \mathbb{P}_1(C_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n(C_n) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}_j(\alpha_j)$$

weil $\mathbb{P}_j(C_j) := \begin{cases} \mathbb{P}_j(\alpha_j) & j \in J \\ 1 & \text{wenn } j \notin J \end{cases}$

Satz: Es seien $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$

$\mathbb{P} := \mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n$ und

$Proj_i : \Omega \longrightarrow \Omega_i$ die Projektion auf die i^{te} Koordinate

(d.h., $Proj_i$ ist die ZV die durch $Proj_i(\omega) := \omega_i,\ \forall \omega \in \Omega$, definiert)

Dann gilt: (1) $\forall i \in [n]: \mathbb{P}_{Proj_i} = \mathbb{P}_i$ (d.h. die Verteilung von ZV $Proj_i$ ist genau $\mathbb{P}_i$)

(2) Die Menge $\{Proj_1, \dots, Proj_n\}$ von ZV ist <u>unabhängig</u>

<u>Beweis:</u> $\boxed{(1)}$ Es sei $\alpha_i \in \Omega_i$ beliebig (und $i \in [n]$ beliebig)

$$\underline{\mathbb{P}_{Proj_i}(\alpha_i)} := \mathbb{P}\Big(\underbrace{\{Proj_i = \alpha_i\}}_{=\ \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times \{\alpha_i\} \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n}\Big) = \sum_{\omega} (\mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n)(\omega) \overset{\text{Lemma}}{=} \underline{\mathbb{P}_i(\alpha_i)}$$

Def von der durch $Proj_i$ induzierte W-Maß

$\boxed{(2)}$ Es seien $J \subseteq [n]$, $|J| < \infty$, beliebig und $\forall j \in J$, $\alpha_j \in \Omega_j$ beliebig.

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcap_{j \in J} \{Proj_j = \alpha_j\}}_{=\ C_1 \times \dots \times C_n}\Big) \overset{\text{Lemma}}{=} \prod_{j \in J} \mathbb{P}_j(\alpha_j) \overset{(1)}{=} \prod_{j \in J} \mathbb{P}_{Proj_j}(\alpha_j) = \underline{\prod_{j \in J} \mathbb{P}(\{Proj_j = \alpha_j\})}$$

wobei $C_i := \begin{cases} \{\alpha_i\} & \text{wenn } i \in J \\ \Omega_i & \text{wenn } i \in [n] \setminus J \end{cases}$

$\Longrightarrow$ So $\{Proj_1, \dots, Proj_n\}$ ist unabhängig

Spezialfall: $\Omega_1 = \dots = \Omega_n = \Omega$ und $\mathbb{P}_1 = \dots = \mathbb{P}_n = \mathbb{P}$

$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \Omega^n$ $\mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n = \mathbb{P}^{\otimes n}$	Bem: Model für n-mal "unabhängig" wiederholt Experimenten

Beispiel: $\Omega = \{0,1\}$ $\mathbb{P}: \Omega \to \{0,1\}$ ist das Bernoulli maß zum Parameter p.

Dann $(\Omega^n, \mathbb{P}^{\otimes n})$ ist der Produkraum wobei die Projektion sind unabhängige ZV mit Bernoulliverteilung:

Satz $\Rightarrow$ (1) $\forall j$ $\mathbb{P}_{Proj_j} = \mathbb{P}_j = \mathbb{P}$ ist Bernoulliverteilung zum Parameter p.

(2) $\{Proj_1, \dots, Proj_n\}$ ist unabhängig.

Satz: (Binomialverteilung als die Summe von n unabhängige Bernoulliverteilungen.) Es seien $\Omega, \mathbb{P}$, und $Proj_i$ wie oben.

$\forall n \in \mathbb{N}_0, p \in [0,1]$ gilt: $\boxed{\mathbb{P}^{\otimes n}_{Proj_1 + \dots + Proj_n} = b_{n,p}}$

Beweis: sei $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\underline{\underline{\mathbb{P}^{\otimes n}_{Proj_1 + \dots + Proj_n}(k)}} = \mathbb{P}^{\otimes n}(Proj_1 + \dots + Proj_n = k) =$$

$$= \mathbb{P}^{\otimes n}\Big(\underbrace{\{\omega \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}}_{= E_k}\Big) =$$

weil $\forall \omega \in E_k$
$\mathbb{P}^{\otimes n}(\omega) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\omega_i)$
$= p^k (1-p)^{n-k}$
weil genau k von ω_i sind $1 \rightsquigarrow$ genau k $\mathbb{P}(\omega_i) = p$)

$$= \sum_{\omega \in E_k} \mathbb{P}^{\otimes n}(\omega) = \sum_{\omega \in E_k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = b_{n,p}(k)$$ $\square$

<u>Anwendung:</u> Erwartungswert von Binomialverteilung:

$n \in \mathbb{N}_0$ $p \in [0,1]$, Ω, $\mathbb{P}$ und Proj_i wie oben.

$\mathrm{Proj}_1 + \dots + \mathrm{Proj}_n$ ist binomialverteilt (zum Parameter n, p)

$$\mathbb{E}(\mathrm{Proj}_1 + \dots + \mathrm{Proj}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{Proj}_1) + \dots + \mathbb{E}(\mathrm{Proj}_n)$$

Linearität des EW.

$$= p + \dots + p = \underline{\underline{np}}$$

Satz (1) und

Proj_i $\mathbb{P}$ ist Bernoulli verteilt zum Parameter p

<u>Alternativer Weg:</u>

Erwartungswert der Binomialverteilung:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot b_{n,p}(k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} = n \cdot p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$= n \cdot p \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,p}(j)\right)}_{=1} = \underline{\underline{n \cdot p}}$$

<u>Satz</u>: (Erwartungswert der Produkt von unabhängige ZV)

$Z, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV mit existierende Erwartungswerten $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Y)$

$\Longrightarrow$ EW von $Z \cdot Y$ auch existiert

und $\mathbb{E}(Z \cdot Y) = \mathbb{E}(Z) \cdot \mathbb{E}(Y)$

<u>Beweis</u>: ① Existenz

$$\sum_{e \in \operatorname{Im}(YZ)} |e| \, P(YZ = e) = \sum_{e \in \operatorname{Im}(YZ)} |e| \cdot \mathbb{P}\left(\bigcup_{c \in \operatorname{Im} Y \setminus \{0\}} \left(\{Y = c\} \cap \{Z = \tfrac{e}{c}\} \right) \right)$$

$$= \sum_{e \in \operatorname{Im}(YZ)} |e| \cdot \sum_{c \in \operatorname{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}\left(\{Y = c\} \cap \{Z = \tfrac{e}{c}\} \right) =$$

$$= \sum_{e \in \operatorname{Im}(YZ)} |e| \cdot \sum_{c \in \operatorname{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \cdot \mathbb{P}(Z = \tfrac{e}{c}) =$$

$$= \sum_{c \in \operatorname{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \sum_{e \in \operatorname{Im}(Y \cdot Z)} |e| \cdot \mathbb{P}(Z = \tfrac{e}{c})$$

$$= \sum_{c \in \operatorname{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \sum_{cd \in \operatorname{Im}(Y \cdot Z)} |cd| \cdot \mathbb{P}(Z = d)$$

$d = \frac{e}{c}$

$$= \sum_{c \in \operatorname{Im} Y \setminus \{0\}} \mathbb{P}(Y = c) \sum_{d \in \operatorname{Im}(Z)} |c||d| \, \mathbb{P}(Z = d)$$

absolute convergence

$$= \left(\sum_{c \in \operatorname{Im} Y} |c| \, P(Y = c) \right) \cdot \left(\sum_{d \in \operatorname{Im}(Z)} |d| \cdot \mathbb{P}(Z = d) \right) = \mathbb{E}(|Y|) \cdot \mathbb{E}(|Z|) < \infty$$

(2) Wiederholen die ganze Rechnung – OHNE Betrag

$$E(YZ) := \sum_{e \in \mathrm{Im}\, YZ} e\, \mathbb{P}(YZ = e) = \text{-----}$$

$$\text{-----} = \left(\sum_{c \in \mathrm{Im}\, Y} c\, \mathbb{P}(Y = c)\right) \cdot \left(\sum_{d \in \mathrm{Im}\, Z} d\, \mathbb{P}(Y = d)\right) = E(Y) \cdot E(Z)$$

$\square$