Binomiale Identitäten (Anwendungen der Bijektionsregel)

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ 0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Beweis: $\exists$ Bijektion

$$\begin{array}{cccc} f: & \binom{[n]}{k} & \longrightarrow & \binom{[n]}{n-k} \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & A & \longrightarrow & \bar{A} = [n] \setminus A \end{array}$$

Behauptung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = \mathcal{P}([n])$

Beweis: ~~Az~~ Zählen wir die Potenzmenge $\mathcal{P}([n])$ auf zwei verschiedene ~~...~~ Arten ab. (double counting)

① Bijektionsregel:

$$\begin{array}{cccc} \exists \text{ Bijektion } f: & \mathcal{P}([n]) & \longrightarrow & \{0,1\}^n \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & A & \longrightarrow & f(A) \end{array} \quad \text{wobei } f(A)_i := \begin{cases} 0 & i \notin A \\ 1 & i \in A \end{cases}$$

Beispiel: $n = 4 \quad A = \{1,4\}$

$f(A) = (1,0,0,1)$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}([n])| = |\{0,1\}^n| \underset{\text{Produktregel}}{=} |\{0,1\}|^n = 2^n$$

② Klassifizieren Elementen von $\mathcal{P}([n])$ nach ihrer Kardinalität

$$\mathcal{P}([n]) = \dot{\bigcup_{k=0}^{n}} \binom{[n]}{k} \underset{\text{Summenregel}}{\Longrightarrow} |\mathcal{P}([n])| = \sum_{k=0}^{n} \left|\binom{[n]}{k}\right| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

~~Pascalsche~~ Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & \boxed{1} & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 5 & & \boxed{10} & & 10 & & \boxed{5} & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$1 + 10 + 5 = 5 + 10 + 1$$

$$1 + 6 + 1 = 4 + 4$$

$$\mathcal{O}_n = \{T \subseteq [n] : |T| \text{ ungerade}\}$$

$$\mathcal{E}_n = \{T \subseteq [n] : |T| \text{ gerade}\}$$

Behauptung: $|\mathcal{O}_n| = |\mathcal{E}_n|$ wenn $n \in \mathbb{N}$ $\left(\text{d.h. } \sum_{k \text{ gerade}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ ungerade}} \binom{n}{k}\right)$

Beweis: Bijektion

$$
\begin{matrix}
A & \longleftrightarrow & \bar{A} \\
\cap & & \cap \\
\mathcal{O} & & \mathcal{E}
\end{matrix}
$$

funktioniert nur wenn n ~~ist~~ ungerade ist

Andere Bijektion: funktioniert $\forall n \in \mathbb{N}$

$$
A \longrightarrow \begin{cases} A \setminus \{n\} & \text{wenn } n \in A \\ A \cup \{n\} & \text{wenn } n \notin A \end{cases}
$$

$$A \in \mathcal{O}, \qquad \text{Bild} \in \mathcal{E}$$

Behauptung $\forall\, n \geq k \geq 0$

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Beweis: Klassifizieren wir die Elemente von $\binom{[n+1]}{k+1}$ nach ihrem größten Element

$$S_i = \{T \subseteq [n+1] : |T| = k+1,\ \max T = i+1\}$$

$$S_i \xleftrightarrow{\text{Bijektion}} \binom{[i]}{k}$$

$$A \in S_i \quad \longmapsto \quad A - \{i+1\} \in \binom{[i]}{k}$$

$$\binom{[n+1]}{k+1} = \dot{\bigcup_{i=k}^{n}} S_i \qquad |S_i| = \binom{i}{k}$$

Summenregel

Beispiel

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

7 21 35 $\boxed{35}$ 21 7 1

$n = 6$

$k = 3$

$$S_3 = \{\{1,2,3,4\}\}$$

$$S_4 = \{\{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\}$$

$S_5 \rightsquigarrow$ größte Element 6

$S_6 \rightsquigarrow$ größte Element 7

$$S_3 \,\dot\cup\, S_4 \,\dot\cup\, S_5 \,\dot\cup\, S_6 = \binom{[7]}{4}$$

Zurück zu Zufallsexperiment 2. Wie viel richtige Zahl habe ich in Lotto?

Wir wissen jetzt die W-keit ~~von eine~~ dass unsere Lottozettel gewinnt: Laplaceraum auf $\binom{[49]}{6}$

$\forall M \in [49]$ W-keit $P_M = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

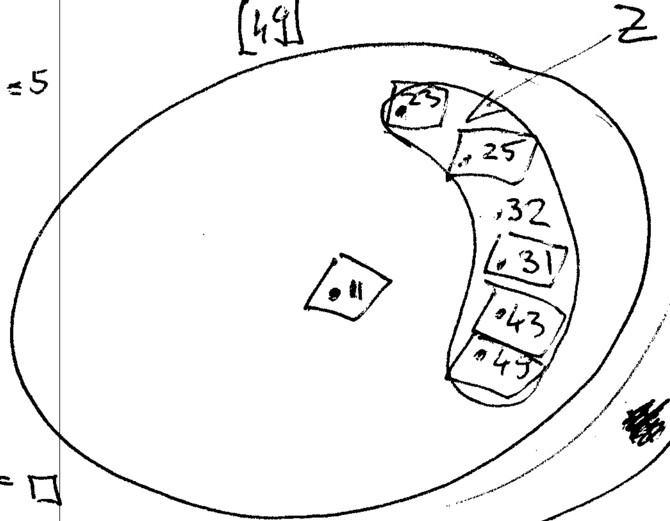
W-keit von mein Zettel $\underbrace{\{23, 25, 31, 32, 43, 49\}}_{= Z} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

W-keit von 6 richtige Zahl $= P(\{Z\}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = P_Z$

W-keit von i richtige Zahl $= \frac{|\mathcal{M}_i|}{\binom{49}{6}}$ → günstige M-Seiten

$$\mathcal{M}_i = \left\{ M \in \binom{[49]}{6} : |\underbrace{M \cap \{23,25,31,32,43,49\}}_{= M \cap Z}| = i \right\}$$

$i = 5$



$M = \square$

- Es gibt $\binom{6}{i}$ Wege $M \cap Z$ auszuwählen (aus Z)
- ~~Was~~ Dann brauchen wir $6-i$ mehr Zahlen in M. Diese kommen aus $[49] \setminus Z$: So $\binom{43}{6-i}$ Wege

$$\Rightarrow |\mathcal{M}_i| = \binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}$$

~~[illegible]~~

Bijektion $\mathcal{M}_i \longleftrightarrow \binom{Z}{i} \times \binom{[49] \setminus Z}{6-i}$

$M \in \mathcal{M}_i \longleftrightarrow (M \cap Z,\ M \cap ([49] \setminus Z)) \in \binom{Z}{i} \times \binom{[49] \setminus Z}{6-i}$

Binomialsatz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Induktion nach n

$n = 0 \qquad (x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{n-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0$

$n = 1 \qquad (x+y)^1 = \binom{1}{0} x^1 + \binom{1}{1} \cdot y^1$

$n > 1 \qquad (x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$

$$= x \sum \qquad + \quad y \sum$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \binom{n-1}{l-1} x^l y^{n-l} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right]}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} y^n + \binom{n-1}{n-1} x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \square$$

Anwendungen (1) $x = y = 1$ $\quad \underset{\underset{2^n}{\parallel}}{(1+1)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(2.) $x = 1$, $y = -1$ $\quad 0 \underset{n \neq 0}{=} (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} \Rightarrow \sum_{k \text{ gerade}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ ungerade}} \binom{n}{k}$

$\Rightarrow |\mathcal{G}_n| = |\mathcal{U}_n|$