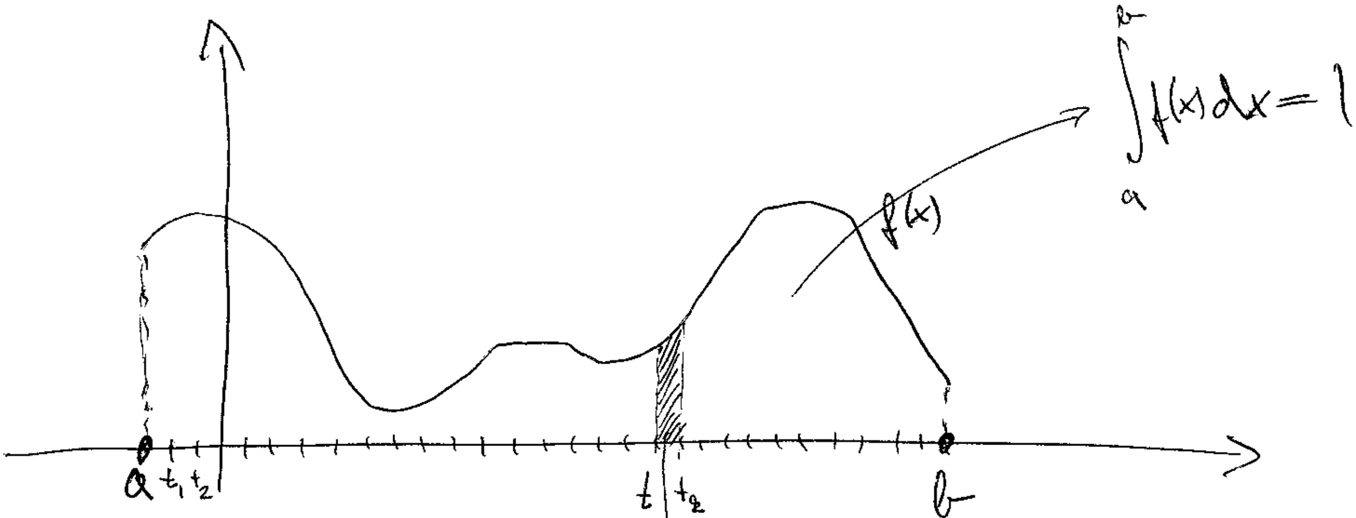
Erwartungswert von reele ZV. mit Dichte

<u>Motivation:</u> Nehmen wir an: • $\Omega = [a,b]$ (kompakt Interval)

• $f:[a,b] \to [0,\infty)$ stetige Dichtefn $\left(\text{d.h. } \int_a^b f(x)\,dx = 1\right)$

• $Z:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetige ZV

Wie sollen wir Erwartungswert definieren?



Approximieren wir mit diskretem Raum.

Mit W-keit $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx$ kommt ein Elementarereignis ω mit $t_{k-1} \le \omega \le t_k$ vor.

(f ist stetig!)

$\Longrightarrow$ Mit W-keit $\approx \boxed{f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})}$ der Wert von Z ist zwischen $Z(t_{k-1})$ und $Z(t_k)$, d.h. $Z(\omega) \approx \boxed{Z(t_{k-1})}$ (Z ist stetig!)

Diskrete EW $\approx \sum_{k=1}^{n} \underbrace{Z(t_{k-1})}_{\text{Wert}} \cdot \underbrace{f(t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1})}_{\text{W-keit des Wertes}}$

$= \sum_{k=1}^{n} (Z\cdot f)(t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1}) \longrightarrow \boxed{\int_a^b Z(x) \cdot f(x)\,dx}$

wenn $a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n = b$ feiner feiner ist
(Riemann integral def)

<u>Def:</u> Sei $\Omega \in \mathcal{B}^n$ ein Borelmenge

sei $\rho : \Omega \to [0,\infty)$ eine Dichtefunktion auf Ω

(D.h. $\cdot\ \rho^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n_\Omega \quad \forall B = (-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$

$\cdot \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$)

sei $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine (reelwertige) ZV

(D.h. $Z^{-1}((-\infty,a]) \in \mathcal{B}^n_\Omega \quad \forall a \in \mathbb{R}$)

Wenn $\int_\Omega |Z(x)| \cdot \rho(x)\,dx < \infty$, dann definieren wir den <u>Erwartungswert</u> von Z durch

$$\boxed{E(Z) := \int_\Omega Z(x) \cdot \rho(x)\,dx}$$

<u>Bemerkungen:</u> ① ρ, Z stetig, $\Omega = [a,b] \Rightarrow \int_a^b |Z(x)| \cdot \rho(x)\,dx < \infty$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum, $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV

	Ω	$\exists ?\ E(Z)$	wenn $\exists$, $E(Z) =$
Discrete Ω	• endlich	IMMER	$\sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$
	• unendlich (abzählbar)	wenn $\sum_{\omega \in \Omega} \lvert Z(\omega)\rvert \mathbb{P}(\{\omega\}) < \infty$	
Ω mit stetige Dichte $\rho : \Omega \to [0,\infty)$ und Z auch stetig	• $[a,b]$	IMMER	$\int_\Omega Z(\omega)\,\rho(\omega)\,d\omega$
	• unbeschränkt $[a,+\infty)$ $(-\infty,a]$ $\mathbb{R}$	wenn $\int_\Omega \lvert Z(\omega)\rvert\,\rho(\omega)\,d\omega < \infty$ (d.h. $Z \cdot \rho$ absolut integrabel)	

Beispiel: (1.) $\Omega = [0,1]$ $\quad \rho(x) = 5x^4$

Check:

$$\int_0^1 5x^4\,dx = x^5\Big|_0^1 = 1$$

$\Rightarrow \rho$ ist eine Dichte auf $[0,1]$

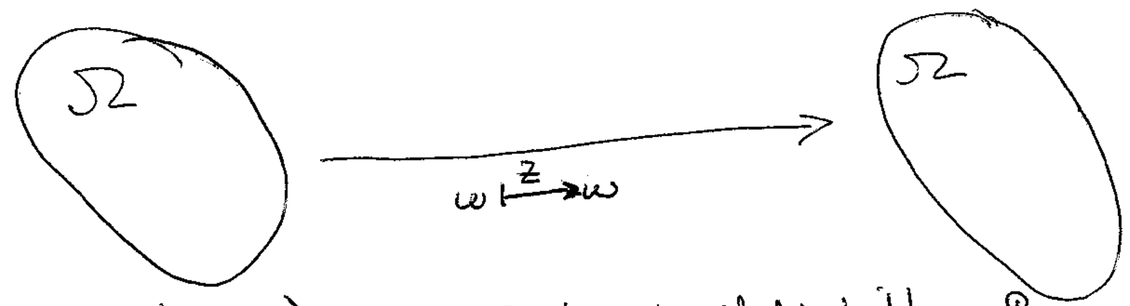
$$Z(x) = x^3$$

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 x^3 \cdot 5x^4\,dx = \frac{5}{8}x^8\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

Def: EW einer Verteilung $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \quad \text{wobei}$$

(2.) Erwartungswert einer Verteilung mit Dichte



$(\Omega, \mathcal{B}^n_\Omega, \mathbb{P}_\rho)$ $\qquad$ Z ist ZV mit Verteilung $\mathbb{P}_\rho$

W-Maß mit Dichte ρ

$$\mathbb{E}(Z) = \int_\Omega x\,\rho(x)\,dx$$

- Gleichverteilung auf $[a,b]$

$\Omega = [a,b]$ mit Dichte $\rho(x) = \frac{1}{b-a}$ $\forall x \in [a,b]$

$$Z(x) = x$$

$$\mathbb{E}(Z) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \underline{\underline{\frac{b+a}{2}}}$$

- Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$

$$\Omega = (0,\infty) \quad g(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \in (0,\infty)$$

$$Z(x) = x$$

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{r\to\infty} \lambda \int_0^r x \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

Partielle Integration

$$= \lim_{r\to\infty} \lambda \left[x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_0^r - \int_0^r \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \right] =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \lambda \left[r \frac{e^{-\lambda r}}{-\lambda} - 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{(-\lambda)^2} \Big|_0^r \right] =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(-r e^{-\lambda r} - \frac{e^{-\lambda r}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{-r}{e^{\lambda r}} - 0 + \frac{1}{\lambda} =$$

L'Hospital

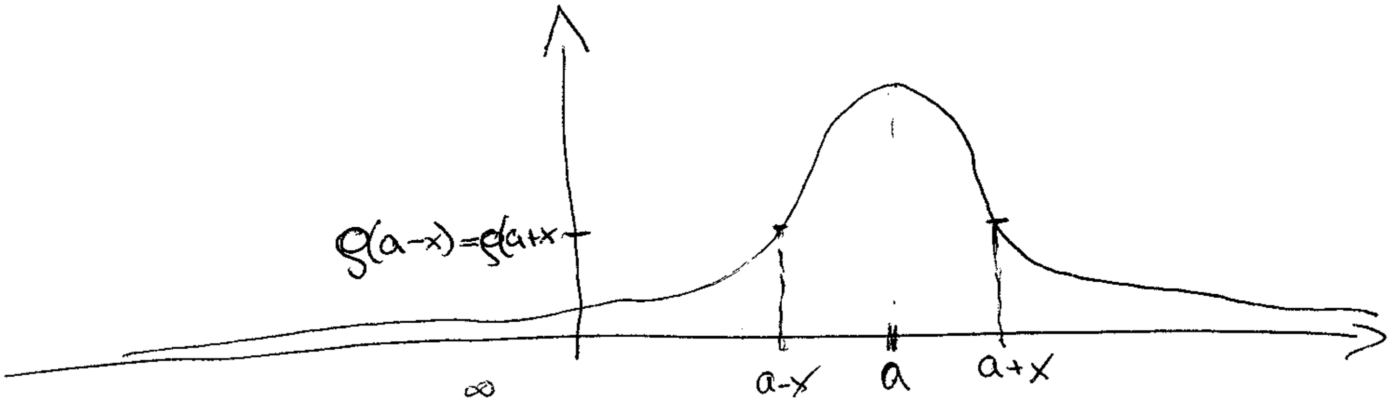
$$= \frac{\lim_{r\to\infty} 1}{\lim_{r\to\infty} \lambda e^{\lambda r}} + \frac{1}{\lambda} = 0 + \frac{1}{\lambda} = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

Normalverteilung zum Parameter $a, \sigma^2 > 0$

$$\Omega = \mathbb{R} \qquad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \rho$ ist symmetrisch auf Punkt a, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \underline{\rho(a-x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{(-x)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \underline{\rho(a+x)}$$



Soll man checken: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \rho(x)\,dx < \infty$!

Allgemein:
- x_0 ist ein Symmetriepunkt des Intervals Ω (d.h. $x_0 + x \in \Omega \iff x_0 - x \in \Omega \quad \forall x$)
- die Dichte $\rho : \Omega \to [0,\infty)$ ist symmetrisch auf x_0 (d.h. $\rho(x_0 - x) = \rho(x_0 + x) \quad \forall x$)

$\Rightarrow$ für ZV $Z(x) = x$, $E(Z) = x_0$

Korollar: Normalverteilte ZV hat EW $\underline{a}$.
$\Omega = \mathbb{R}$ $x_0 = a$

Beweis: Sei $\Omega = \mathbb{R}$ (Erweitern ρ wenn nötig.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x)\,dx \underset{z = x - x_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (z + x_0)\rho(z + x_0)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z\rho(z+x_0)\,dz + x_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(z+x_0)\,dz}_{\shortparallel} = \int_{0}^{\infty} z\rho(z+x_0)\,dz$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} z\rho(z+x_0)\,dz + x_0 = \int_{0}^{\infty} z\rho(z+x_0)\,dz + \underbrace{\int_{\infty}^{0} (-w)\rho(-w+x_0)(-1)\,dw}_{\shortparallel} + x_0 = \underline{\underline{x_0}}$$

$$w = -z \qquad -\int_{0}^{\infty} \rho(x_0 + w)\,dw$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum

Sei $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine ZV.

Wir ~~sagen~~ schreiben $Z \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ wenn $\mathbb{E}(Z)$ existiert

$Z \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ wenn $\mathbb{E}(Z^2)$ existiert $Z^2 \in \mathcal{L}^1$

Bem: $\mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{L}^1$ $\quad (|Z| \leq 1 + |Z|^2 \ \forall \omega \in \Omega)$

Def: Für $Z, Y \in \mathcal{L}^2$ heißt

- $\mathbb{V}(Z) := \mathbb{E}\left((Z - \mathbb{E}(Z))^2\right)$ die Varianz von Z

  $\sqrt{\mathbb{V}(Z)}$ die Streuung oder Standardabweichung von Z

- $\mathrm{Cov}(Z,Y) = \mathbb{E}\left((Z - \mathbb{E}(Z))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$ die Kovarianz von Z und Y

  wenn $\mathrm{Cov}(Z,Y)$ heißen Z und Y unkorrelliert

Bemerkungen

- $\mathbb{V}(Z)$ existiert $(Z - E(Z))^2 = Z^2 - 2E(Z)\cdot Z + E(Z)^2 \in \mathcal{L}^1$

  $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}\left(Z^2 - 2E(Z)\cdot Z + E(Z)^2\right) = E(Z^2) - 2E(Z)\cdot E(Z) + E(Z)^2$

  $= E(Z^2) - E(Z)^2$

- $\mathrm{Cov}(Z,Y)$ existiert weil $|(Z - E(Z))(Y - E(Y))| \leq |ZY| + |E(Z)Y| + |E(Y)Z| + |E(Z)E(Y)|$ $\quad |ZY| \leq Z^2 + Y^2 \in \mathcal{L}^1$

  $\mathrm{Cov}(Z,Y) = \mathbb{E}\left(ZY - E(Z)\cdot Y - E(Y)Z + E(Z)\cdot E(Y)\right) = E(ZY) - E(Z)\cdot E(Y)$

Satz: $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ W-Raum

$Z, Y, Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV sodass $\mathbb{V}(Z)$ und $\mathbb{V}(Y)$ existiert.
$\mathbb{V}(Z_i)$ existiert

Dann gilt:

(i) ~~Varianz für~~ die Varianz existiert für $aZ+b$, $cY+d$

und $\mathrm{Cov}(aZ+b, cY+d) = ac\,\mathrm{Cov}(Z,Y)$

Insbesondere $\mathbb{V}(aZ+b) = a^2\mathbb{V}(Z)$

(ii) $\mathrm{Cov}(Z,Y)^2 \leq \mathbb{V}(Z)\cdot\mathbb{V}(Y)$

(iii) $\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right) \in \mathcal{L}^2$ $\quad \mathbb{V}(\sum Z_i) = \sum \mathbb{V}(Z_i) + 2\sum_{\substack{i,j \\ 1\leq i<j\leq n}} \mathrm{Cov}(Z_i, Z_j)$

Insbesondere: $Z_1, \dots, Z_n$ sind paarweise unkorreliert

gilt: $\mathbb{V}(\sum Z_i) = \sum \mathbb{V}(Z_i)$

(iv) Z, Y sind unabhängig $\Rightarrow$ Z, Y sind unkorreliert

Beweis: (i) $(aZ+b)^2 = a\underset{\in \mathcal{L}^2_Z}{Z^2} + \underset{\in \mathcal{L}^2_Z}{abZ} + \underset{\in \mathcal{L}^2_Z}{b^2} \in \mathcal{L}^2_Z$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aZ+b, cY+d) &= \mathbb{E}[(aZ+b)(cY+d)] - \mathbb{E}[aZ+b]\,\mathbb{E}[cY+b] \\ &= \mathbb{E}[acZY + bcY + adZ + bd] - (a\mathbb{E}[Z]+b)(c\mathbb{E}(Y)+b) \\ &= ac\,E(ZY) + bcE(Y) + ad\,E(Z) + bd - \\ &\quad -(ac\,E(Z)E(Y) + bc\,E(Y) + ad\,E(Z) + bd) = ac(E(ZY) - E(Z)E(Y)\end{aligned}$$

(ii) ~~Beweis für~~ Erst: $E(Z) = E(Y) = 0$

Beweis für diskret

$$\mathrm{Cov}(Z,Y)^2 = \mathbb{E}(ZY)^2 = \left(\sum_{z,y} zy \; \mathbb{P}(Z=z, Y=y)\right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{z,y} z^2 \, \mathbb{P}(Z=z, Y=y)\right)\left(\sum_{z,y} y^2 \, \mathbb{P}(Z=z, Y=y)\right)$$

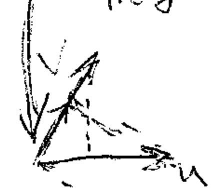
CS Ungleichung

$$= \left(\sum_z z^2 \sum_y \mathbb{P}(Z=z, Y=y)\right)\left(\sum_y y^2 \sum_z \mathbb{P}(Z=z, Y=y)\right)$$

$$= \left(\sum z^2 \, \mathbb{P}(Z=z)\right)\cdot\left(\sum y^2 \cdot \mathbb{P}(Y=y)\right)$$

$$= \mathbb{V}(Z) \cdot \mathbb{V}(Y)$$

$\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \cdot v$ Projektion



Cauchy-Schwarz

$v, u \in \mathbb{R}^n$

$|\langle v,u\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle \cdot \langle u,u\rangle$

$$\left\langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \cdot v, v \right\rangle = 0$$

Pythagoras

$$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \left\|u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\right\|^2 + \left\|\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \cdot v\right\|^2$$

$$\geq \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\langle v,v\rangle^2} \langle v,v\rangle \quad \checkmark$$

Für Dichte: CS für Integrals

In Allgemeinen $E(Z), E(Y)$ beliebig $\rightsquigarrow$ $Z - E(Z) = Z'$ $E(Z')$
$Y - E(Y) = Y'$ $E(Y')$

$$\mathrm{Cov}(Z,Y)^2 = \mathrm{Cov}(\underbrace{Z - E(Z)}_{Z'}, \underbrace{Y - E(Y)}_{Y'})^2$$

$$\leq \mathbb{V}(Z') \cdot \mathbb{V}(Y') = \mathbb{V}(Z) \cdot \mathbb{V}(Y)$$

(iii) Erst $\mathbb{E}(z_i) = 0$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_i z_i\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}(z_i z_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(z_i^2) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbb{E}(z_i z_j)$$

$$=$$

$\mathbb{E}(z_i)$ beliebig $\rightsquigarrow z_i' = z_i - \mathbb{E}(z_i)$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) = \mathbb{V}\left(\sum z_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(z_i') + 2 \sum_{\substack{i,j \\ 1 \le i < j \le n}} \mathrm{Cov}(z_i', z_j')$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(z_i) + 2 \sum_{\substack{i,j \\ 1 \le i < j \le n}} \mathrm{Cov}(z_i', z_j')$$

(iv) z, Y unabhängig $\Rightarrow E(zY) = E(z) \cdot \mathbb{E}(Y)$

Tschebyscheff-Ungleichung

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ W-Raum

$Z: \Omega \to \mathbb{R}$ ZV mit existierenden EW und Varianz

Dann $\forall \lambda > 0 \quad \mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \lambda\right) \leq \dfrac{\sigma^2(Z)}{\lambda^2}$

Folgerung von

Markov-Ungleichung: $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ W-Raum

$Z: \Omega \to \mathbb{R}$ ZV

$\forall \alpha > 0 \quad \mathbb{P}\left(|Z| \geq \alpha\right) \leq \dfrac{E(|Z|)}{\alpha}$

Beweis: $\forall \omega \in \Omega \quad |Z(\omega)| \geq \alpha \, \chi_{\{|Z| \geq \alpha\}}(\omega)$

(wobei $\{|Z| \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega : |Z(\omega)| \geq \alpha\}$ und χ ist ihre Indikatorvariable)

$$\mathbb{E}(|Z|) \overset{\text{Monotonität}}{\geq} \mathbb{E}\left(\alpha \, \chi_{\{|Z| \geq \alpha\}}\right) \overset{\text{Linearität}}{=} \alpha \, \mathbb{E}\left(\chi_{\{|Z| \geq \alpha\}}\right) = \alpha \cdot \mathbb{P}\left(\{|Z| \geq \alpha\}\right)$$

□

Beweis von Tschebyscheff:

Markov: mit $(Z - \mathbb{E}(Z))^2$ und λ

$$\mathbb{P}(|Z - E(Z)| \geq \lambda) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{(Z - E(Z))^2}_{\geq 0} \geq \lambda^2\Big) \leq \frac{\overset{\sigma^2(Z) \,=\, \mathrm{Var}(Z) \,=}{E\left((Z - E(Z))^2\right)}}{\lambda^2}$$

□

Korollar: $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ $\quad Z_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV

$Z_n \in \mathcal{L}^2$

$$\frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n)^2} \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > \varepsilon\, \mathbb{E}(Z_n)\right) \longrightarrow 0$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien $X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ ~~seien~~ unabhängige ZV.

Nehmen wir an dass $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathbb{V}(X_i)$ existiert.

~~Dann ... ist~~ Sei $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

Dann für $\forall \varepsilon > 0$ ist

$$\mathbb{P}\left(\left| \overline{X}_n - \frac{\sum E(X_i)}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2 \varepsilon^2}$$

Insbesondere, wenn $X_1, X_2, \dots$, sind identisch verteilt mit Verteilung $\mathbb{P}_X$

$$\overline{X}_n \xrightarrow{i.W.} \mathbb{E}(X) \quad \left(d.h. \ \forall \varepsilon > 0 \ \mathbb{P}(|\overline{X}_n - E(X)|) \leq \frac{Var(X)}{n \varepsilon^2} \right)$$

Beweis: $E(\overline{X}_n) \overset{\text{linearität}}{=} \sum \frac{1}{n} E(X_i)$

$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) \underset{\text{wegen unabhängigkeit}}{=} \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(X_1) + \dots + \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(X_n)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)| \geq \varepsilon \right) \underset{\text{nach Tschebyschev's Ungleichung}}{\leq} \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

wenn ~~X_1~~ ~~X_2~~ ~~jede~~ X_i nach X verteilt ist

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X)}{n} = \frac{n \mathbb{E}(X)}{n} = \mathbb{E}(X)$$

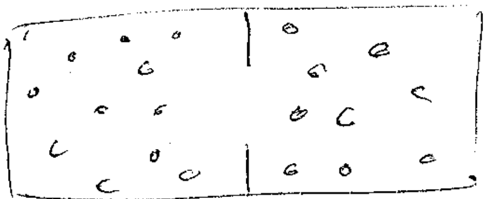
$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{n \mathbb{V}(X)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{n \varepsilon^2}$$

Beispiel: Das Ehrenfest-Modell im Gleichgewicht.

(container)
Ein Gefäß, das in zwei gleich große miteinander verbundene Teilkammern unterteilt ist, enthalte $n = 0{,}25 \cdot 10^{23}$ Gas-Moleküle. (Größenordnung der Avogadro Zahl)

Wegen der Irregularität der Bewegung wird zu einem festen Zeitpunkt jedes Molekül mit W-keit $\frac{1}{2}$ in der linken oder rechten Kammer sein, unabhängig von allen anderen

Mit welcher W-keit ist der Anteil der Molekül in der linken Kammer geringfügig größer als der als der in der rechten Kammer, etwa $\geq \frac{(1+10^{-8})}{2} = \frac{1}{2} + 5 \cdot 10^{-9}$



$\vee$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\wedge$

$0{,}25 \cdot 10^{23}\left(\frac{1}{2} + 5 \cdot 10^{-9}\right)$ $\qquad$ 12499999875000000000000

$= 0{,}125 \cdot 10^{23} + 1{,}25 \cdot 10^{14}$

$= 12500000125000000000000$

Seien $X_1, \dots, X_n$ Bernoulli Variablen zum Parameter $p = \frac{1}{2}$. Dabei bedeute $X_i = 1$, dass sich die i-te Teilchen in der linken Kammer befindet. Dann gilt (aus Symmetriegründen)

$$P\left(\frac{1}{n}\sum X_i \geq \frac{1+10^{-8}}{2}\right) = P\left(\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{2} \geq \frac{10^{-8}}{2}\right) = \frac{1}{2} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}\right| \geq 5 \cdot 10^{-9}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{V\left(\text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{n \cdot (5 \cdot 10^{-9})^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{4}}{0{,}25 \cdot 10^{23} \cdot 25 \cdot 10^{-18}} = 2 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000002$$

Diese geringe W-keit erklärt warum solche Abweichungen nicht beobachtet werden

Defacto ist die W-keit extrem viel kleiner: unvorstellbar niedrige Schranke $\leq 10^{-500000}$

<u>Beispiel</u>: Ein Würfel wird 20 Mal geworfen und zeigt immer 6. Ist der Würfel in Ordnung, das heißt, sind die Zahlen wirklich gleichverteilt?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{i-ten Wurf 6 erscheint} \\ 0 & \neq 6 \end{cases}$$

Für $p = \frac{1}{6}$

$$P\left(\left|\overline{X_n} - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{5}{6}\right) \leq \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{20\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{60}$$

$$P\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \geq a\right) \leq \frac{p(1-p)}{n a^2}$$

$\Rightarrow$ der Würfel mit W-keit $\geq 98\%$ <u>nicht</u> in Ordnung

Beispiel: Wir werfen ein Reißzwecke in die Luft und nach dem Fallen schauen ob es ~~die~~ mit der Spitze ~~die~~ nach oben oder unten zeigt. Wir wollen wissen die W-keit dass es ist oben

thus 1000 $\rightsquigarrow$ 678 oben

Schätzung $\underset{\sim}{p = \frac{678}{1000}} = 0{,}678$

Kann sein $p \neq$ --

$$\mathbb{P}\left(\left|p - \frac{678}{1000}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{1000\,\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4}\,\frac{1}{1000\,\varepsilon^2}$$

$\varepsilon = 0{,}1$

$$\frac{1}{4 \cdot 1000} \cdot 100 = \frac{1}{40} = \underline{\underline{0.025}}$$

$97{,}5\%$ $\qquad p \in [0.578, 0.778]$

Für

98% sicherheit $\rightsquigarrow$ $1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n\,0{,}01^2} \geq 0{,}98$

$n \geq 125000$