Erwartungswert von reelwertigen ZV

- Diskrete W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$
- ZV $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (Werte sind reele Zahlen)

Wenn wir nur eins Information/Zahl über Z fragen können, was möchten wir wissen? Welche Zahl säge die meistens über Z?

- ~~Die~~ Zahl, die irgendwie ausdrückt, was wir von Z im Mittel erwarten können.

Beispiele, wo es wichtig ist, den Mittelwert von Z zu kennen:

- Wie hoch wird der Gewinn im Mittel bei einem Glückspiel? (Lotto, Roulette, Black Jack, ...)
- Wie viele Anrufe im Durchschnitt wird das Call-Center meines Unternehmens in einem festen Zeitinterval erhalten?
- Mit welcher mittleren Schadenshöhe sollte ein Versicherungsunternehmen in nächsten Jahr zählen?

Erwartungswert von Z: die äußerste konzentrierte Information über Z.

Wie sollten wir es definieren?

Motivation für die Definition (aus endlichen Räumen)

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ $\quad \mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$

Wenn $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ m-Mal abgefragt

Und, z.B, bekommen wir
m_1-Mal ω_1
m_2-Mal ω_2
$\vdots$
m_n-Mal ω_n

Dann der Mittelwert ist $\dfrac{m_1 Z(\omega_1) + \cdots + m_n Z(\omega_n)}{m}$

wobei $m = m_1 + \cdots + m_n$.

Wenn m groß genug ist (im Vergleich zu $\frac{1}{\mathbb{P}(\omega_i)}$ $\forall i \in [n]$), dann sollte sich der relative Anteil von ω_i, also $\frac{m_i}{m}$) gut durch $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ approximieren lassen:

Also: $\dfrac{m_1 Z(\omega_1) + \cdots + m_n Z(\omega_n)}{m} = \frac{m_1}{m} Z(\omega_1) + \cdots + \frac{m_n}{m} Z(\omega_n) \approx \mathbb{P}(\omega_1) Z(\omega_1) + \cdots + \mathbb{P}(\omega_n) \cdot Z(\omega_n)$

Definition: $(\Omega, \mathbb{P})$ ist diskrete W-Raum

$Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ZV

Z besitzt einen Erwartungswert wenn $\sum_{\omega \in \Omega} |Z(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) < \infty$.

In diesem Fall ist die Summe $\boxed{E(Z) := \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)}$ wohldefiniert und heißt der Erwartungswert von Z.

(absolut Konvergenz)

Bemerkung: ① Die Bedingung $\sum_{\omega\in\Omega} |Z(\omega)| \mathbb{P}(\omega) < \infty$ ist nötig, weil andernfalls keine eindeutige Zahl existiert wo die Reihe $\sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\cdot \mathbb{P}(\omega)$ konvergiert.

z.B.: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ ist beliebig W-Maß auf Ω mit $\mathbb{P}(i) \neq 0 \quad \forall i \in \Omega$ (z.B. Poisson)

Dann Z, $Z(i) := \frac{(-1)^i}{\mathbb{P}(i)}$, hat keine Erwartungswert

Auch $W: \Omega \to \mathbb{R}$, $W(i) := \frac{(-1)^i}{i\,\mathbb{P}(i)} \; \forall i \in \Omega$, hat keine

Aber $U: \Omega \to \mathbb{R}$, $U(i) := \frac{(-1)^i}{i^2\,\mathbb{P}(i)} \; \forall i \in \Omega$, hat!

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{i=1}^{\infty} U(i)\,\mathbb{P}(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

② Wenn $|\Omega| < \infty$: $\sum_{\omega\in\Omega} |Z(\omega)|\cdot \mathbb{P}(\omega) < \infty \quad \forall$ ZV $Z: \Omega \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Erwartungswert existiert für jedes ZV $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ mit endlichem Definitionsbereich Ω

Behauptung: $(\Omega, \mathbb{P})$ ist diskreter W-Raum

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist eine ZV}$$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{c \in Z(\Omega)} c \cdot \mathbb{P}_Z(c)$$

Beweis:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{c \in Z(\Omega)} \sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)$$

Klassifizieren wir Elemente von Ω nach ihrem Bild in Z.

Für $\omega \in Z^{-1}(c)$: $Z(\omega) = c$

$$= \sum_{c \in Z(\Omega)} \sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} c \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{c \in Z(\Omega)} c \cdot \sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} \mathbb{P}(\omega)$$

$$\sum_{\omega \in Z^{-1}(c)} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(Z^{-1}(c)) = \mathbb{P}_Z(c)$$

$$= \sum_{c \in Z(\Omega)} c \cdot \mathbb{P}_Z(c)$$

$\square$

„Erwartungswert einer Verteilung" $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$, $\boxed{\Omega \subseteq \mathbb{R}}$

ist die Erwartungswert der ZV $\mathrm{Id} : \Omega \to \Omega$, $\mathrm{Id}(\omega) = \omega \quad \forall \omega \in \Omega$.

Das heißt $\boxed{\sum_{\omega \in \Omega} \omega \cdot \mathbb{P}(\omega)}$

Eigenschaften des EW

Satz: Es seien X und $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ reelwertige ZV für die der Erwartungswert definiert lässt, und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann

(i) der EW existiert für $c \cdot X$ und $\mathbb{E}(c \cdot X) = c\,\mathbb{E}(X)$

(ii) der EW existiert für $X+Y$ und $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

(iii) Gilt $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für $\forall \omega \in \Omega$, so ist $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

(iv) $\forall$ Ereignis $E \subseteq \Omega$ gilt: $\mathbb{E}(\chi_E) = \mathbb{P}(E)$

Beweis: (i) $\sum\limits_{\omega \in \Omega} |c\,X(\omega)|\,\mathbb{P}(\omega) = |c| \cdot \overbrace{\sum |X(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega)}^{<\infty} < \infty$

$$\mathbb{E}(cX) = \sum_{\omega \in \Omega} c\,X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) = c \cdot \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) = c \cdot \mathbb{E}(X)$$

(ii) $$\sum_{\omega \in \Omega} |(X+Y)(\omega)|\,\mathbb{P}(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} \left(|X(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) + |Y(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) \right) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} |Y(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\omega) < \infty$$

weil beide Summen absolut konvergent sind.

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega))\,\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) + Y(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega)$$

weil beide Summen absolut konvergent sind

(iii) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \underset{\text{Für jede Term}}{\leq} \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(Y)$$

(iv) $$\mathbb{E}(\chi_E) = \sum_{c \in \{0,1\}} c \cdot \mathbb{P}_{\chi_E}(c) = 0 \cdot \mathbb{P}_{\chi_E}(0) + 1 \cdot \overbrace{\mathbb{P}_{\chi_E}(1)}^{\mathbb{P}(E)} = \underline{\mathbb{P}(E)}$$

Beispiel: Erwartungswert der hypergeometrische Verteilung

Parameters N, n, R $\qquad h_{N,n,R}(k) = \frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Wir haben bewiesen die

Behauptung: Es sei $\Omega = [N]^n$, $\mathbb{P}$ gleichverteilung auf Ω,

$Z : \Omega \longrightarrow \{0,1,\dots,n\}$ ZV : $Z((x_1,\dots,x_n)) = \left|\underbrace{\{i\in[n] : 1\le x_i\le R\}}_{\text{"Anzahl der ROTE Kugel"}}\right|$

Dann das induziert W-Maß $\mathbb{P}_Z : \{0,1,\dots,n\} \longrightarrow [0,1]$ ist hypergeometrisch verteilt

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{n} k\, h_{N,n,R}(k) = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{\binom{R}{k}\cdot\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{R\binom{R-1}{k-1}\cdot\binom{N-R}{n-k}}{\frac{N}{n}\cdot\binom{N-1}{n-1}}$$

$$\underset{j=k-1}{=} \frac{nR}{N}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\binom{R-1}{j}\cdot\binom{N-R}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nR}{N}\sum_{j=0}^{n-1} h_{N-1,n-1,R}(j) = \underline{\underline{\frac{nR}{N}}}$$

Alternativ Weg: $Z = \chi_{E_1} + \dots + \chi_{E_n}$ wobei χ_{E_i} ist die Indikator ZV der Ereignis $E_i := \{x\in\Omega : 1\le x_i\le R\}$

$Z((x_1,\dots,x_n))$ zählt die "Rote Koordinate" des Tupels,

$\chi_{E_i}((x_1,\dots,x_n))$ zählt EINS wenn die i-te Koordinate ROT ist.

Linearität des Erwartungswertes $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}(\chi_{E_1}) + \dots + \mathbb{E}(\chi_{E_n})$

$\forall i\in[n]$ gilt: $\mathbb{E}(\chi_{E_i}) \overset{\text{Satz (iv)}}{=} \mathbb{P}(E_i) = \frac{|E_i|}{|\Omega|} = \frac{R\cdot((N-1)\cdot(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-n+1))}{N^n} = \underline{\underline{\frac{R}{N}}}$

Anzahl der mögliche i-te Koordinate

Anzahl der möglichkeiten für den Rest: $(N-1)^{n-1}$, weil der Wert der i-te Koordinate verboten ist.

$$\boxed{\text{Also: } \mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{R}{N} = \frac{nR}{N}}$$