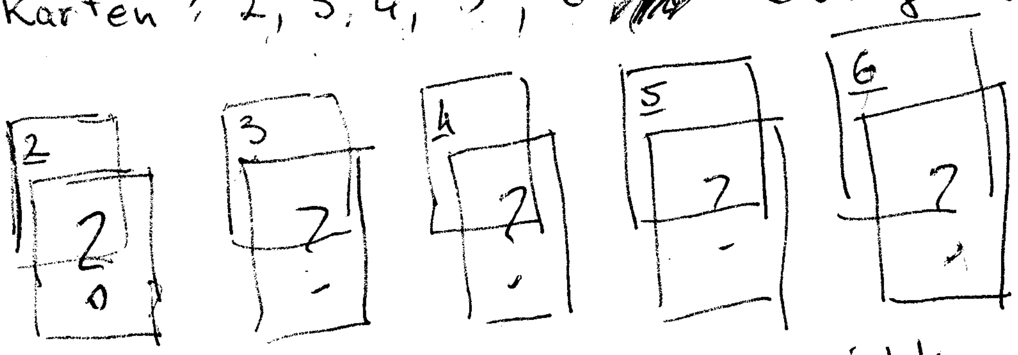
Wette: Karten: 2, 3, 4, 5, 6 GUT gemischt



① Ich gewinne 1€, wenn eine der Karten an der richtigen Stelle ist. Sonst gewinnen Sie 1€.

Würden Sie wetten?

② Ein Stapel mit 5 Karten, gut gemischt

-"- 10 Karten, -"-

Sie gewinnen 1€, wenn eine der Karten an der richtigen Stelle ist

Mit welchem Stapel möchten Sie spielen?

$\Omega = [n]^{\underline{n}}$ (Permutationen von n-elementiger Menge)

$$E = \underbrace{\{(x_1, \dots, x_n) \in [n]^{\underline{n}} : x_i \neq i \text{ für } \forall i \in [n]\}}_{\text{"Losermenge"}}$$

Laplaceraum auf Ω

$$p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

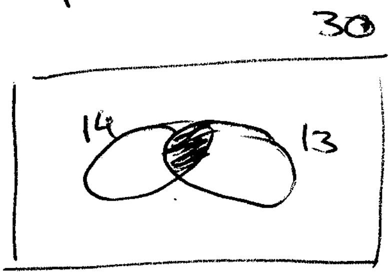
$$G_i = \underbrace{\{(x_1 \dots x_n) \in [n]^{\underline{n}} : x_i = i\}}_{i\text{te "Gewinner-menge"}}$$

$|G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n| = ??$ Problem: Mengen G_i sind NICHT disjunkt

also → Summenregel ist NICHT nützlich

Inklusion – Exklusion (Verallgemeinerung der Summenregel)

Beispiel: In einem Dorf haben die Kinder die Möglichkeit Fußball und Handball zu spielen. Es gibt 30 Schüler in der 8ten Klasse, 14 spielen Fußball, 13 spielen Handball. Wie viele spielen keinen Sport?



Nicht genug Infos um zu antworten!

Wie viele spielen beides? 4

Dann $\underbrace{30 - 14 - 13}_{\text{Schüler die beides spielen wurden doppelt subtrahiert}} + 4 = 7$ Schüler spielen keinen Sport

---

Beispiel: Wie viele Zahlen zwischen 1 und 30 gibt es, die relativ prim zu 30 sind?

relativ → teilerfremd

$\Updownarrow$

nicht teilbar mit 2
– " – 3
– " – 5

Def: $a, b \in \mathbb{N}$, $\underline{a}$ relativ prim zu $\underline{b}$, wenn der größte gemeinsame Teiler 1 ist.

$$g.g.T.(a,30) = 1 \iff 2 \nmid a \text{ und } 3 \nmid a \text{ und } 5 \nmid a$$

$$A_j := \{x \in [30] : j \mid x\}$$ → natürliche Zahlen bis 30, die durch j teilbar sind

Wir möchten die Menge $[30] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5)$ abzählen

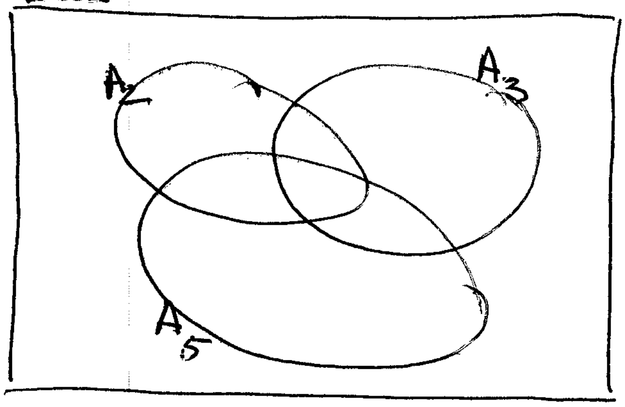
$$\| \quad \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5}$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = \underbrace{|A_2| + |A_3| + |A_5|}_{} - \underbrace{|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5|}_{}$$

Zahlen, die in ~~zwei~~ Mengen erscheinen, sind doppelt gezählt

Zahlen, die in <u>GENAU</u> zwei Mengen enthalten sind, sind jetzt genau einmal abgezählt ✓
Aber ~~die~~ Zahlen, die in allen drei Mengen enthalten sind, wurden ~~was~~ erst dreimal addiert dann dreimal subtrahiert. Also wir müssen sie noch einmal addieren

[30]



$$+|A_2 \cap A_3 \cap A_5|$$ ✓ JETZT alles OK

- $|A_j|$ = Anzahl natürliches Zahlen bis j, die mit j teilbar sind

$$= \left\lfloor \frac{30}{j} \right\rfloor$$

(Def: $x \in \mathbb{R}$ $\lfloor x \rfloor :=$ größte ganze Zahl, die kleiner gleich ~~x~~ x ist)

- p und q sind teilerfremd $\Rightarrow A_p \cap A_q = A_{pq}$

($p|x$ und $p|x \Leftrightarrow pq|x$)

$$\Rightarrow |A_2 \cap A_3| = |A_6| = 5, \quad |A_2 \cap A_5| = |A_{10}| = 3, \quad |A_3 \cap A_5| = |A_{15}| = 2$$

$$\Rightarrow |A_2 \cup A_3 \cup_5| = 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$$

$$\Rightarrow |\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_5| = |[30] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5)| = 30 - 22 = \underline{8}$$

Inklusion-Exklusion Satz

Für endliche Mengen $A_1, \dots, A_n$,

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|}$$

• Spezialfall: wenn $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt sind

dann $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ für $\forall I, |I| \geq 2$,

so $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \rightsquigarrow$ Summenregel

• Spezialfall $n=3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{I \subseteq [3]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Satz ist Korollar des folgenden Satzes

Satz: Für beliebige Mengen $A_1, \dots, A_n \subseteq S$

$$\boxed{\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \equiv \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} \qquad (*)}$$

wobei $\mathbb{1}_X : S \to \{0,1\}$ ist die Indikatorfunktion der Menge $X \subseteq S$

$$\mathbb{1}_X(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \in X \\ 0 & \text{wenn } \omega \notin X \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum_{\omega \in S} \mathbb{1}_X(\omega) = |X|}$$

Satz $\Rightarrow$ Inkl-Exkl

Hier $A_1, \dots, A_n$ sind ENDLICH! $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\omega \in S} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(\omega) = \sum_{\omega \in S} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} \sum_{\omega \in S} (-1)^{|I|+1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega) = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \underbrace{\sum_{\omega \in S} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega)}_{= \left|\bigcap A_i\right|}$$

<u>Beweis vom Satz:</u> wenn $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\mathbb{1}_{\cup A_i}(\omega) = 0$ und auch $\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega) = 0 \quad \forall I \subseteq [n]$

Sei $\boxed{\omega \in \bigcup A_i} \Leftrightarrow \boxed{\mathbb{1}_{\cup A_i}(\omega) = 1}$

Es seien $i_1, \dots, i_r$, $1 \le i_1 < \dots < i_r \le n$, genau die Indizes, so dass $\omega \in A_j \Leftrightarrow \exists\, l,\ 1 \le l \le r,\ \omega \in A_{i_l}$.

- Dann $\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega) = 1 \Leftrightarrow I \subseteq \{i_1, \dots, i_r\}$

Was ist auf der Rechten Seite von $(*)$

~~(?) r-elementige Teilmenge von {i...~~

wenn $|I| = 1 \rightsquigarrow \binom{r}{1}$ mal $+1$

$|I| = 2 \rightsquigarrow \binom{r}{2}$ mal -1

$\vdots$

$|I| = j \rightsquigarrow \binom{r}{j}$ mal $(-1)^{j+1}$

$\vdots$

$|I| = r \rightsquigarrow 1$ mal $(-1)^{r+1}$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega) = \sum_{\substack{I \subseteq \{i_1, \dots, i_r\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{\substack{I \subseteq \{i_1, \dots, i_r\} \\ |I| = j}} (-1)^{j+1} \cdot 1 = \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} \cdot (-1)^{j+1} = 1 - (1-1)^r = 1$$

weil $r \neq 0$!

__Anwendung__: (Anzahl der "Derangements" (Permutation ohne Fixpunkt)

$$G_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in [n]^n : x_i = i\} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$|G_i| = \left|\left([n] \setminus \{i\}\right)^{n-1}\right| = (n-1)!$$

$\boxed{\text{Inklusion - Exklusion}} \Rightarrow$

$$|G_1 \cup \dots \cup G_n| = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} G_i\right|$$

Klassifizieren die Summe nach der Kardinalität s der Teilmenge $I \subseteq [n]$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = s}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} G_i\right|$$

$\bigcap_{i \in I} G_i$ enthält Permutationen die Fixpunkte haben in für jede $i \in I$. Die andere $n - |I|$ Koordinaten beliebig aus der Menge $[n] \setminus I$ ausgewählt sein. Also $\left|\bigcap_{i \in I} G_i\right| = \left|\left([n] \setminus I\right)^{n-|I|}\right|$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = s}} (-1)^{s+1} (n-s)!$$

Es gibt $\binom{n}{s}$ Teilmenge $I \subseteq [n]$ mit $|I| = s$

$$= \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} (-1)^{s+1} (n-s)!$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{n!}{s!\,\cancel{(n-s)!}} (-1)^{s+1} \cancel{(n-s)!}$$

$$= n! \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s+1}}{s!}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632\dots$$

Zurück zum Beispiel:

W-keit einer Übereinstimmung bei n Karten

ist $$\ddot{u}_n = \frac{|G_1 \cup \ldots G_n|}{n!} = \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s+1}}{s!}$$

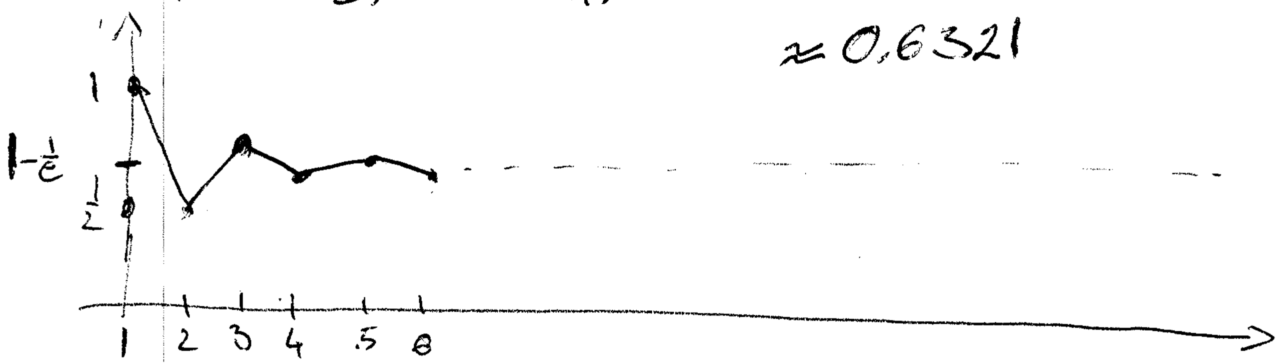
$$\ddot{u}_1 = 1$$

$$\ddot{u}_2 = 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \approx 0{,}5$$

$$\ddot{u}_3 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3} \approx 0{,}633$$

$$\ddot{u}_4 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{15}{24} \approx 0.6319$$

$$\approx 0.6321$$



$$\ddot{u}_1 > \ddot{u}_3 > \ddot{u}_5 > \ldots > \ddot{u}_{2k+1} > \ldots > 1-\frac{1}{e} > \ldots > \ddot{u}_{2k} > \ldots > \ddot{u}_6 > \ddot{u}_4 > \ddot{u}_2$$

Frage 1. $\ddot{u}_5 > \frac{1}{2}$. Sie sollten nicht wetten.

Frage 2 Sie sollten den Stapel mit 5 Karten wählen

Zählen (Zusammenfassung)

- Zählproblem (in deutscher Sprache) "Textaufgabe" → eine Menge zu identifizieren (formal, mathematisch beschrieben), die wir zählen müssen

- Bijektionsregel → hilfreich eine Menge für unsere Zählprobleme zu finden, die wir auch zählen KÖNNEN

- Methoden:

Summenregel (d.h. Fallanalyse, "Divide et impera")

Verallgemeinerung: wenn die Fälle sich NICHT gegenseitig ausschließen → Inklusion-Exklusion Formel

Spezialfall: wenn alle (sich gegenseitig ausschließenden) Fälle die GLEICHE Kardinalität haben → Mehrstufige Produktregel → Produktregel