Wie beschreibt man eine Situation mit Zufall, wo die mögliche Ergebnisse sind reele Zahlen?

(zB: Warten auf etwas (Telefon, Handwerker, Regen, ..

Wenn es höchstens abzählbar viele mögliche Ergebnisse gab, konnten wir sie durchgehen, eins nach dem anderen, und geben die W-keit für jedes Ergebnis.

Dies könnte nicht sehr nützlich sein, wenn die Menge der möglichen Ergebnisse überabzählbar ist, denn es könnte sein, dass die W-keit von jedem spezifischen Ergebnis 0 ist. In diesem Fall haben wir nicht viel über die Situation gelernt, obwohl wir die W-keit von jedem einzelnen Elementarereignis gelernt haben.

Idee: Statt: $\forall x \in \mathbb{R}$ die W-keit von x geben, Lieber: $\forall x \in \mathbb{R}$ die W-keit, dass das Ergebnis HÖCHSTENS x ist

Dies erfordert den gleichen Aufwand (eine Funktion $F: \mathbb{R} \to [0,1]$
liefert aber wichtige Information.

zB: die W-keit, dass wir mehr als 10 Minuten warten müssen, ist $1 - F(10)$

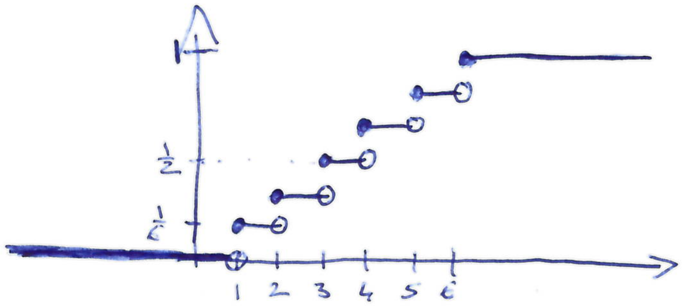
die W-keit, dass wir zwischen 5 und 10 Minuten warten müssen, ist $F(10) - F(5)$.

Beispiel: (1) Diskreter W-Raum $(\mathbb{N}_0, P)$

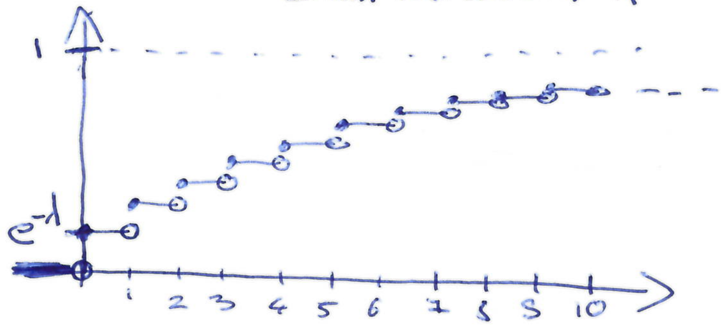
$$F_P(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} P(i)$$

P und F_P sind konvertierbar; $P(n) = F_P(n) - F_P(n-1)$

ZB: Fairer Würfel



Poisson zum Parameter λ



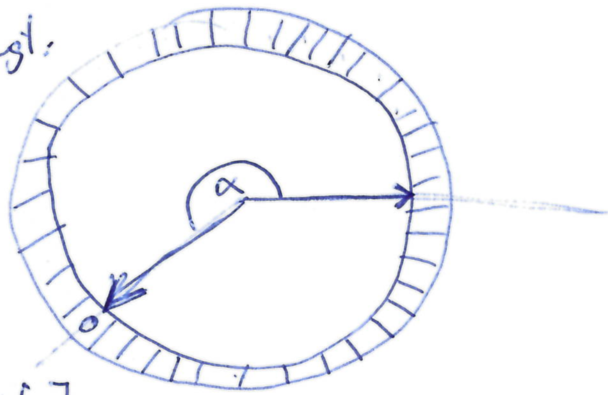
(2) Fairer Roulette-Rad

In welche Richtung zeigt die 0, wenn das Rad zur Ruhe kommt?

Keine Richtung ist bevorzugt.

Menge der mögliche Winkel ist $\Omega = (0, 2\pi]$

Kein Interval von Winkel ist bevorzugt:



$$P((0,\pi]) = P((\pi, 2\pi]) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\left(0, \tfrac{2\pi}{3}\right]\right) = P\left(\left(\tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{4\pi}{3}\right]\right) = P\left(\left(\tfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right]\right) = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\left(k\tfrac{2\pi}{n}, (k+1)\tfrac{2\pi}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in [n]$$

$$\Longrightarrow \forall \alpha \in (0, 2\pi] \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \ \ \frac{k}{n}2\pi \le \alpha \le \frac{k+1}{n}2\pi \quad \left(k = \left\lfloor \frac{\alpha n}{2\pi} \right\rfloor\right)$$

$$F_P(\alpha) = P((0,\alpha]) \ge P\left(\left(0, k \cdot \tfrac{2\pi}{n}\right]\right) = \sum_{i=0}^{k-1} P\left(\left(i\tfrac{2\pi}{n}, (i+1)\tfrac{2\pi}{n}\right]\right) = \left\lfloor \frac{\alpha n}{2\pi} \right\rfloor \cdot \frac{1}{n}$$

$$\wedge$$

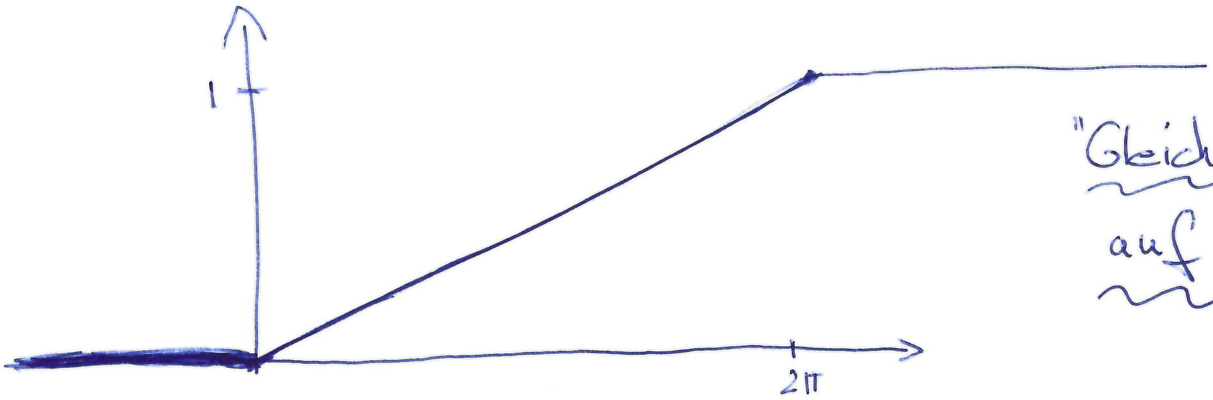
$$P\left(\left(0, (k+1)\tfrac{2\pi}{n}\right]\right) = \sum_{i=0}^{k} P\left(\left(i\tfrac{2\pi}{n}, (i+1)\tfrac{2\pi}{n}\right]\right) = \left(\left\lfloor \frac{\alpha n}{2\pi} \right\rfloor + 1\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{\alpha n}{2\pi}-1\right)\cdot\frac{1}{n} \le \left\lfloor\frac{\alpha n}{2\pi}\right\rfloor\cdot\frac{1}{n} \le F_{\mathbb{P}}(\alpha) \le \left\lfloor\frac{\alpha n}{2\pi}\right\rfloor\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n} \le \frac{\alpha n}{2\pi}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$$

$$\frac{\alpha}{2\pi}-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi} \xleftarrow{n\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi}+\frac{1}{n}$$

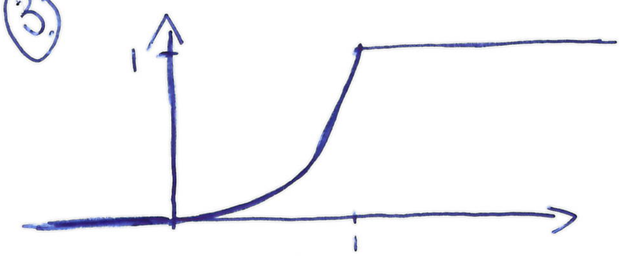
$\boxed{\text{SO:}}$ $F_{\mathbb{P}}(\alpha) := \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \frac{\alpha}{2\pi} & 0 \le \alpha < 2\pi \\ 1 & \alpha \ge 2\pi \end{cases}$ ist eine vernünftige Wahl,

um das Verhalten eines (idealen) fairen Roulette-Rad zu beschreiben.



"Gleichverteilung" auf $[0, 2\pi)$

3.



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$\mathbb{P}((0{,}1,\ 0{,}2]) = F(0{,}2) - F(0{,}1) = 0{,}04 - 0.01 = 0{,}03$

$\mathbb{P}((0{,}7,\ 0{,}8]) = F(0{,}8) - F(0{,}7) = 0{,}64 - 0{,}49 = 0{,}15$

Größere Zahlen haben größere W-keit.

4. Wie lang müssen wir auf den Schadenfall warten?

$\Omega = (0, \infty) \qquad \forall t \in \Omega$

$F_{\mathbb{P}}(t) = \mathbb{P}((0,t]) =$ W-keit von MINDESTENS 1 Schadenfall in $(0,t]$

$$= 1 - p_{\alpha t}(0) = 1 - e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^0}{0!} = \boxed{1 - e^{-\alpha t}}$$

W-keit von KEINE Schadenfall in $(0,t]$

(Poisson verteilung zum Parameter αt)

Def: Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ einen W-Raum.
Die Funktion $F_{\mathbb{P}}: \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch
$F_{\mathbb{P}}(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, heißt die
Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

Bemerkung: $\mathbb{P}$ wird durch seine Verteilungsfunktion bestimmt

D.h.: Wenn $\mathbb{P}$ und $\tilde{\mathbb{P}}$ W-Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sind
sodass $F_{\mathbb{P}} \equiv F_{\tilde{\mathbb{P}}}$, dann auch gilt $\mathbb{P} \equiv \tilde{\mathbb{P}}$.

Tatsächlich: Benutzen wir den

Eindeutigkeitssatz: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum.
Wenn (i) $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$ wobei $\mathcal{G}$ schnitt-stabil ist
(ii) $\tilde{\mathbb{P}}: \mathcal{F} \to [0,1]$ ein W-Maß s.d. $\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}} \equiv \mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$
Dann gilt: $\tilde{\mathbb{P}} \equiv \mathbb{P}$

Beweis: $\boxed{\text{HA}}$

$$F_{\mathbb{P}} \equiv F_{\tilde{\mathbb{P}}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}((-\infty, x]) = F_{\mathbb{P}}(x) = F_{\tilde{\mathbb{P}}}(x) = \tilde{\mathbb{P}}((-\infty, x])$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}|_{{}_\infty\mathcal{I}_a} \equiv \tilde{\mathbb{P}}|_{{}_\infty\mathcal{I}_a} \quad \text{wobei } {}_\infty\mathcal{I}_a := \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$$

ist ein schnitt-stabil Erzeuger von $\mathcal{B} = \sigma({}_\infty\mathcal{I}_a)$

$$\Rightarrow \mathbb{P} \equiv \tilde{\mathbb{P}}$$

Welche Eigenschaften haben Verteilungsfunktionen?

Lemma (Eigenschaften von Verteilungsfunktionen)

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ein W-Raum. Dann

(i) $F_{\mathbb{P}}$ ist monotone steigend

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F_{\mathbb{P}}(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_{\mathbb{P}}(x) = 1$

(iii) $F_{\mathbb{P}}$ ist rechtstetig (d.h. $\forall c \in \mathbb{R}$ $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F_{\mathbb{P}}(c+\varepsilon) = F_{\mathbb{P}}($

Beweis: (i) Sei $x < y$.

$$F_{\mathbb{P}}(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonität von } \mathbb{P}}}{\leq} \mathbb{P}((-\infty, y]) =: F_{\mathbb{P}}(y)$$

(ii) Für beliebige Folge $x_n \to -\infty$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{P}}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((-\infty, x_n]) \underset{\text{stetigkeit von oben}}{=} \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Für beliebige Folge $x_n \to \infty$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n) = \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{P}}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((-\infty, x_n]) \underset{\text{stetigkeit von unten}}{=} \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$$

(iii) Für beliebige Folge $\varepsilon_n \searrow 0$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, c+\varepsilon_n] = (-\infty, c] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{P}}(c+\varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((-\infty, c+\varepsilon_n]) \underset{\text{stetigkeit von oben}}{=} \mathbb{P}((-\infty, c]) = F_{\mathbb{P}}(c)$$

$\square$

(i)–(iii) characterizieren Verteilungsfunktionen

<u>Satz:</u> $\forall$ Funktion $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ mit Eigenschaften (i)–(iii)

$\exists!$ W-Maß $\mathbb{P}_F$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ so dass $F_{\mathbb{P}_F} \equiv F$.

<u>Beweis:</u> (Skizze)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ definieren $\tilde{\mathbb{P}}((a,b]) := F(b) - F(a)$

Dann $\tilde{\mathbb{P}}$ ist ein Prämaß auf dem Halbring ${}_{o}\mathcal{I}_a$.

$\underset{\text{Caratheodory}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ ein Erweiterung $\mathbb{P}_F$ auf die ganze σ-Algebra, die von ${}_{o}\mathcal{I}_a$ erzeugte: $\sigma({}_{o}\mathcal{I}_a) = \mathcal{B}$.

D.h.: $\mathbb{P}_F((a,b]) = \tilde{\mathbb{P}}((a,b]) = F(b) - F(a)$

Es folgt: $\mathbb{P}_F((-\infty, b]) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_F((-n,b]) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}((-n,b])$

stetigkeit von oben

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b] = (-\infty, b]$

$= \lim_{n\to\infty} F(b) - F(-n) = F(b) - \lim_{n\to\infty} F(-n) \underset{\substack{\uparrow \\ (ii)}}{=} F(b)$

$\Longrightarrow F_{\mathbb{P}} \equiv F$

Eindeutigkeit von $\mathbb{P}_F$ folgt von dem Eindeutigkeitssatz, weil ${}_{\infty}\tilde{\mathcal{I}}_a = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$ ist ein <u>Schnitt-stabil Erzeuger von $\mathcal{B}$</u> ist.

$\square$

(Erinnerung:

Def: Ist $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so heißt die Funktion

$$F_{\mathbb{P}} : \mathbb{R} \to [0,1], \text{ definiert durch } F_{\mathbb{P}}(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]),$$

die Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

$\forall$ Intervall: $\mathbb{P}((a,b]) = \mathbb{P}((-\infty,b] \setminus (-\infty,a]) = \mathbb{P}((-\infty,b]) - \mathbb{P}((-\infty,a])$

$$= F_{\mathbb{P}}(b) - F_{\mathbb{P}}(a)$$

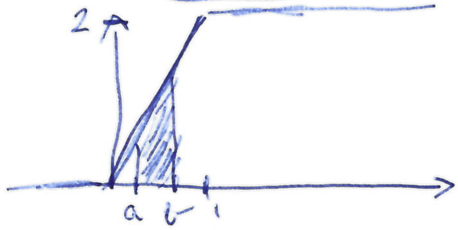
Wie kann man die W-keit komplizierter Borelmengen mit $F_{\mathbb{P}}$ ausdrücken?

ZB: wenn $F_{\mathbb{P}}$ stetig differenzierbar ist:

Riemann Integral

$$\mathbb{P}((a,b]) = F_{\mathbb{P}}(b) - F_{\mathbb{P}}(a) = \int_a^b F_{\mathbb{P}}'(x)\,dx$$

(= Flächeninhalt unter $F_{\mathbb{P}}'$ zwischen a und b)



Aber was passiert mit der W-keit von beliebigen Borelmengen?

Gibt es eine vernünftige und konsistente Definition

von $\int_A F_{\mathbb{P}}'(x)\,dx$ $\forall$ Borelmenge $A \in \mathcal{B}$???

JA! die Lebesgue Integral liefert ein σ-Additive $\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P}(A) = \int_A F_{\mathbb{P}}'(x)\,dx := \int F_{\mathbb{P}}'(x)\,\mathbb{1}_A(x)\,dx$$

Tatsache (Lebesgue Integral)

$\forall f: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ mit $f^{-1}([0,c]) \in \mathcal{B}^n \;\forall c>0$ $(\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n \;\forall B \in$

kann $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \in [0,\infty]$ so erklärt werden das folgendes gilt:

$\longrightarrow$ Lebesgue Integral von f

- f ist Riemann-integrierbar $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx =$ Riemann-Integral von f
- $\forall$ Folge $f_1, f_2, \dots$ von Funktionen $: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ mit $f_i^{-1}([0,c]) \in \mathcal{B}^n \;\forall c>0 \;\forall i \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x)\,dx$$

Bemerkung: Die Voraussetzung von f ist von $\forall$ nichnegative Stückweise stetig Funktionen erfüllt.

Def (Lebesgue Maß)

Die Abbildung $\lambda^n : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0,\infty]$, definiert durch

$\lambda^n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x)\,dx \quad \forall A \in \mathcal{B}^n$, heißt das n-dimensionaler Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

Bemerkung: $\cdot\, \lambda^n(\emptyset) = 0$

$\cdot\, \lambda^n$ ist σ-Additive : $\forall$ disjunkte Folge $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}^n$

$$\lambda^n\left(\cup A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(A_i)$$

$\left(\lambda^n(\cup A_i) = \int 1_{\cup A_i}(x)dx = \int \sum 1_{A_i}(x)\,dx = \sum \int 1_{A_i}(x)dx = \sum \lambda^n(A_i)\right)$

Mann kann (Lebesgue)-Integral benutzen, um W-Räume zu definieren:

Satz: (Konstruktion von W-Maßen durch Dichten)

Sei • $\Omega \in \mathcal{B}^n$ eine Borelmenge

• $\rho : \Omega \to [0,\infty)$ eine Funktion mit Eigenschaften

$$\text{(i)} \quad \rho^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{B}^n_\Omega \qquad \forall c > 0$$

$$\text{(ii)} \quad \int_\Omega \rho(x)\,dx = 1$$

Dann die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{B}^n_\Omega \to [0,1]$, definiert durch

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \rho(x)\,dx \quad (\forall A \in \mathcal{B}^n_\Omega),$$ ist ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{B}^n_\Omega)$

ρ heißt die Dichtefunktion von $\mathbb{P}$.

Beweis: (P1) $\mathbb{P}(\Omega) = \int_\Omega \rho(x)\,dx \overset{(ii)}{=} 1$

(P2) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{B}^n \Rightarrow \mathbb{1}_{\cup E_i} = \sum \mathbb{1}_{E_i}$

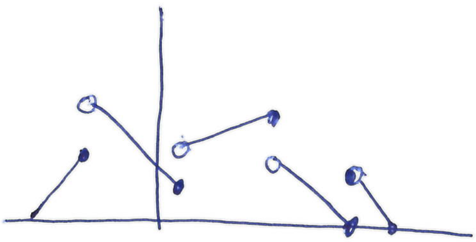
$$\mathbb{P}(\cup E_i) = \int_{\cup E_i} \rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\cup E_i}(x)\,\rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum \mathbb{1}_{E_i}(x)\,\rho(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{E_i}(x)\,\rho(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \rho(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) \quad \square$$

Bemerkung: Die "Schönheitseigenschaft" (i) wird durch (stückweise) stetige Funktionen erfüllt (und wir betrachten nur diese.):

ρ ist stetig $\Rightarrow \rho((-\infty, c])$ ist abgeschlossen

$\Rightarrow \rho((-\infty, c])$ ist Borelmenge



Beispiel: <u>Gleichverteilung</u>

Sei $\Omega \in \mathcal{B}^n$, sodass $0 < \lambda^n(\Omega) < \infty$.

Das W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ mit der konstante Dichtefunktion $\rho(x) = \frac{1}{\lambda^n(\Omega)}$ heißt die <u>Gleichverteilung auf Ω</u>

Sie wird mit $\mathcal{U}_\Omega$ bezeichnet; $\mathcal{U}_\Omega(A) = \int_A \frac{1}{\lambda^n(\Omega)} dx = \frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\Omega)}$ $\forall A \in \mathcal{B}^n_\Omega$

Bemerkung:

- "Meistens" W-Maße auf $\mathbb{R}^n$ haben KEINE Dichtefunktion
- W-Maß bestimmt die Dichtefunktion NICHT eindeutig

  zB: $\mathcal{U}_{[0,1]} = \mathcal{U}_{(0,1)}$

- Ein W-Maß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ mit Dichtefunktion $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ lässt sich identifizieren mit den W-Maß $\overline{\mathbb{P}}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ zur Dichtefunktion $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$

- Diskrete W-Maß und W-Maßen mit Dichte kann man kombinieren: zB:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}\delta_{-1}(A) + \frac{2}{3}\mathcal{U}_{(0,1)}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

ist ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

$\mathbb{P}((-1, \frac{1}{2})) = \frac{1}{3}$

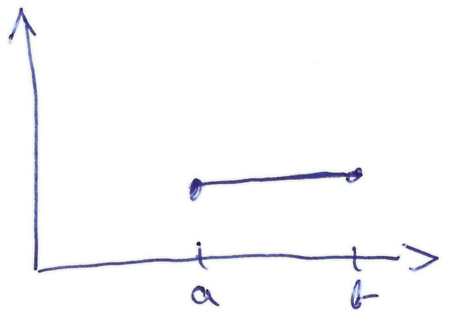
$\mathbb{P}([-1, \frac{1}{2})) = \frac{2}{3}$

Beispiel:

1. $\Omega = [a,b]$ wobei $a < b$ $a,b \in \mathbb{R}$

Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a,b]$$



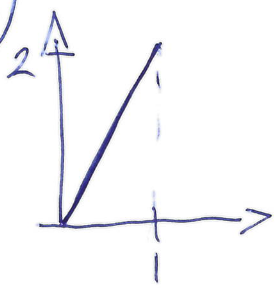
$\forall c,d,\ a \leq c \leq d \leq b$

$$\mathbb{P}([c,d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} x \Big|_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$

$\forall B \in \mathcal{B}_{[a,b]}$

$$\mathbb{P}(B) = \int_B \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_B 1\, dx = \frac{\lambda(B)}{b-a}$$

2. 

$\Omega = [0,1]$

Dichte $f(x) := 2x \quad x \in [0,1]$

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $\int_0^1 f(x)dx = x^2 \Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

zB $\mathbb{P}_f([0,0.2]) = \int_0^{0,2} 2x\, dx = x^2 \Big|_0^{0.2} = 0{,}04 - 0^2 = 0{,}04$

$\wedge$

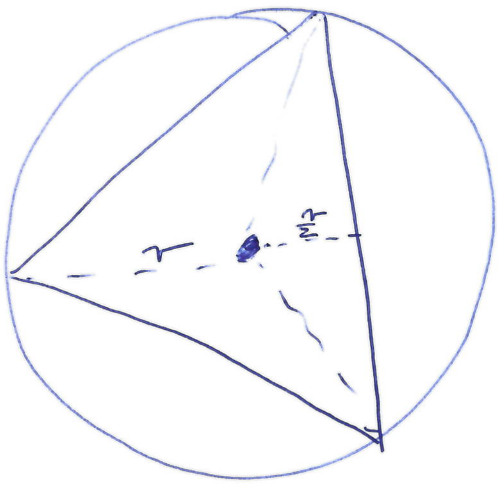
$\mathbb{P}_f([0.7, 0{,}9]) = \int_{0,7}^{0,9} 2x dx = x^2 \Big|_{0,7}^{0,9} = 0{,}81 - 0{,}49 = 0{,}32$

Die Länge der Intervalle sind die gleiche (0.2)
Aber die Intervall $[0.7, 0.9]$ ist viel Wahrscheinlicher.

Bertrand'sche Paradox (1889)

In einem Kreis mit Radius $r > 0$ werde "rein zufällig" eine Sehne gezogen. (Nehmen wir an dass es nicht durch den Mittelpunkt geht.)

Frage: Mit welcher W-keit ist die Sehne länger als die Seiten des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks?



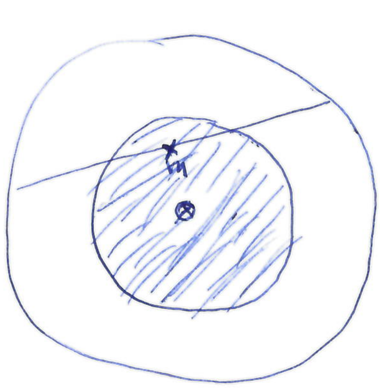
Die Antwort hängt davon ab, was man unter "rein zufällig" versteht! (Nach welchem Verfahren die Sehne gezogen wird)

1. Variant: Sehne ist durch ihren Mittelpunkt eindeutig bestimmt.

Gleichverteilt Mittelpunkt aus $\Omega_1 = \{m \in \mathbb{R}^2 : 0 < |m| < r\}$ wählen

$$A_1 = \{m \in \Omega_1 : |m| < \frac{r}{2}\}$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

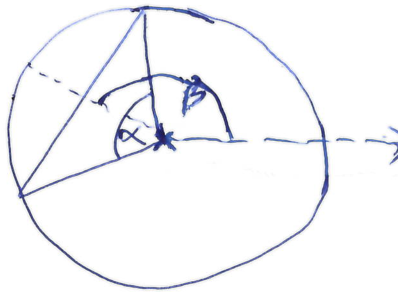


Variant 2.

Sehne $\longleftrightarrow (\alpha, \beta) \in (0,\pi) \times [0, 2\pi)$

Winkel, unter dem die Sehne vom Kreismittelpunkt aus zu sehen ist

Richtung der Mittelsenkrechte



Gleichverteilt $(\alpha, \beta) \in \boxed{(0, \pi) \times [0, 2\pi) =: \Omega_2}$

$$A_2 = \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \times [0, 2\pi)$$

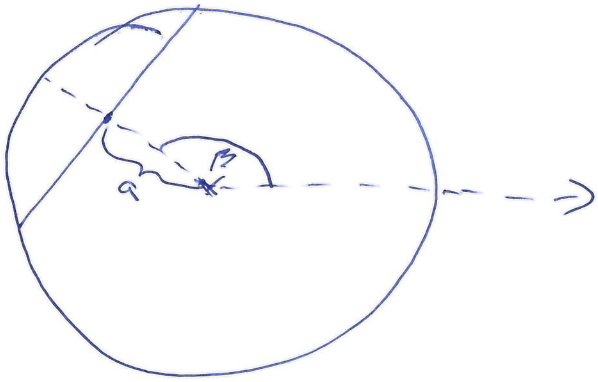
$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 2\pi}{\pi \cdot 2\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Variant 3.

Sehne $\longleftrightarrow (a, \beta)$

Abstand vom Kreismittelpunkt

Richtung der Mittelsenkrechten



Gleichverteilt $(a, \beta) \in \boxed{(0, r) \times [0, 2\pi) =: \Omega_3}$

$$A_3 = \left(0, \frac{r}{2}\right) \times [0, 2\pi)$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{\frac{r}{2} \cdot 2\pi}{r \cdot 2\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Welche ist das "gute" Model? Es hängt von der Anwendung.

Das zentrale Problem bei allen Anwendungen ist die Wahl eines zutreffenden Modells.

Beispiel in $\mathbb{R}^n$ Gleichverteilung auf Hyperwürfel

$$\Omega = [-1,1]^n = \{(x_1,\dots,x_n) : -1 \le x_i \le 1 \ \forall i\}$$

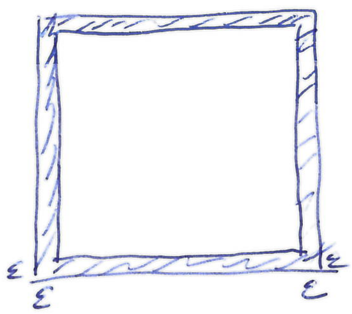
$$\lambda^n(\Omega) = 2^n \quad \text{Volumen}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass ein rein zufällig gewählter Punkt ~~ver~~ nahe am Rand liegt?

ZB: Für $\varepsilon = 0{,}01$, wie wahrscheinlich ist es dass der Abstand von v zum Rand höchstens ε ist?

$$E = \Omega \setminus [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$$

$n=2$.



$$\mathbb{P}(E) = 4\cdot\varepsilon - 4\varepsilon^2 \le 0{,}04 \quad 4\%$$

Allgemein:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2^n - (2-2\varepsilon)^n}{2^n} = 1-(1-\varepsilon)^n = 1 - 0{,}99^n \longrightarrow 1$$

Für $n=1000$ die W-keit ist $99{,}99567\%$

$\rightsquigarrow$ Für "große" Dimension n, ist es sehr sehr wahrscheinlich, dass ein zufällig ausgewählter Punkt nahe am Rand liegt.

Meistens betrachten wir "schöne" Verteilungsfunktionen F:

- wenn F stetig ist $\Longrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}_F(\{x\}) = 0$

<u>Beweis:</u> $\{x\} = \bigcap (x - \frac{1}{n}, x] \Longrightarrow \mathbb{P}_F(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_F((x-\frac{1}{n}, x]) = \lim_{n\to\infty} (F(x) - F(x-\frac{1}{n}))$

stetigkeit von oben

$= F(x) - \lim_{n\to\infty} F(x - \frac{1}{n}) = F(x) - F(x)$

stetigkeit von F

<u>Bemerkung:</u> andere Richtung ($\Longleftarrow$) gilt auch

- wenn F auch stückweise stetig differenzialbar ist
(d.h. $\exists\, a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{R}$, so dass F' existiert und ist stetig auf $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{\ell-1}, a_\ell), (a_\ell, \infty)$)

<u>Satz:</u> Sei $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Funktion mit Eigenschaften

(i) monotone steigende

(ii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

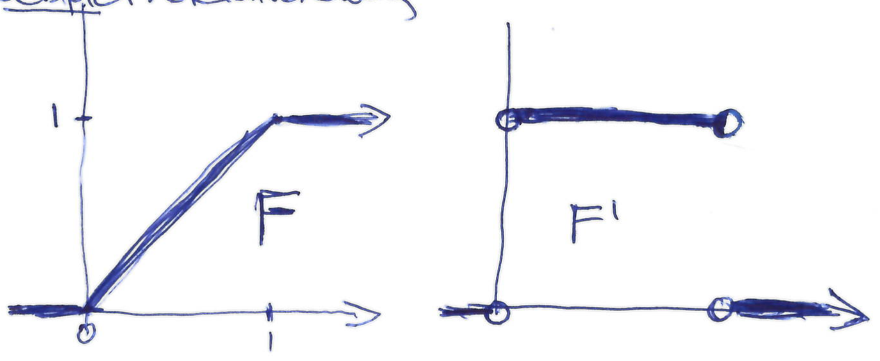
(iii) stetig

(iv) stückweise stetig differzialbar

Dann ist F' eine Dichtefunktion auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und für das zugehörige W-Maß $\mathbb{P}: \mathcal{B} \to [0,1]$ gilt: $F_{\mathbb{P}} \equiv F$

[oder auf $(\Omega = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \dots \cup (a_{\ell-1}, a_\ell) \cup (a_\ell, \infty), \mathcal{B}_\Omega)$ wenn F nur stückweise stetig differenzialbar.]

<u>Beispiel:</u> Gleichverteilung



Beweis: (für stetig differenzierbar F)

- $F'(x) \geq 0$ $\uparrow$ F is monotone steigende

- $\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} F'(x)dx = \lim_{r\to\infty} F(x)\Big|_{-r}^{r} =$

$= \lim_{r\to\infty} F(r) - F(-r) = \lim_{r\to\infty} F(r) - \lim_{r\to\infty} F(-r) = 1 - 0 =$

- $\underline{\underline{F_{\mathbb{P}}(y)}} := \mathbb{P}((-\infty, y]) = \int_{-\infty}^{y} F'(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{y} F'(x)dx =$

$= \lim_{r\to\infty} F(x)\Big|_{-r}^{y} = \lim_{r\to\infty} F(y) - F(-r) = F(y) - \lim_{r\to\infty} F(-r)$

$F(y) - 0 = \underline{\underline{F(y)}}$

[The allgemeinere Situation ist ähnlich. ZB für $y \in (a_s, a_{s+1})$

$F_{\mathbb{P}}(y) = \int_{-\infty}^{y} F'(x)dx = \int_{-\infty}^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \dots + \int_{a_s}^{y} =$

$= \lim_{z \nearrow a_1} F(z) - \lim_{r\to-\infty} F(r) + \lim_{z\nearrow a_2} F(z) - \lim_{z \searrow a_1} F(z) + \dots + F(y) - \lim_{z\searrow a_s} F(z)$

$\left(\lim_{z\nearrow a_i} F(z) = \lim_{z \searrow a_i} F(z) \text{, weil } F \text{ stetig ist} \right)$

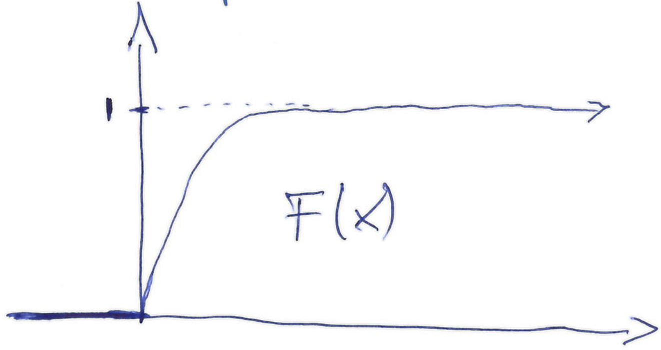
$= F(y) - \lim_{r\to-\infty} F(r) = F(y) - 0 = \underline{\underline{F(y)}}$]

$\square$

Beispiel: (Die Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$.)

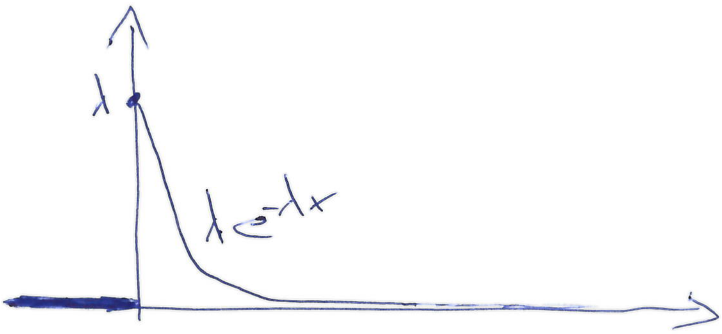
Wann passiert der erste Schadenfall? $\Omega = (0, \infty)$

$$F(x) := \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Eigenschaften (i) – (iv) sind erfüllt.

$$F'(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Sei $\lambda > 0$.
Das zu Dichtefunktion $\lambda e^{-\lambda x}$ gehörige W-Maß auf $((0,\infty), \mathcal{B}_{(0,\infty)})$ heißt Exponentialverteilung zum Parameter λ

Verallgemeinerung: $r \in \mathbb{N}$

"W-keit für mindestens r Schädenfälle in $[0,t]$" =

$$= 1 - P_{\alpha t}(\{0, 1, \dots, r-1\}) = 1 - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!} = \int_0^t \frac{\alpha^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\alpha x} \, dx$$

Poissonverteilung zum Parameter αt

$\gamma_{\alpha, r}(x)$ ist die Dichtefunktion für die Gamma-Verteilung

Eulersche Gammafunktion (Verallgemeinerung von Faktorial)

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} \, dy \qquad \Gamma(1) = 1$$

$r > 0$

$$\Gamma(r+1) = r\,\Gamma(r) \Rightarrow \Gamma(r) = (r-1)! \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

Die Normalverteilungen

$\Omega = \mathbb{R}$ Parameters $a \in \mathbb{R}$

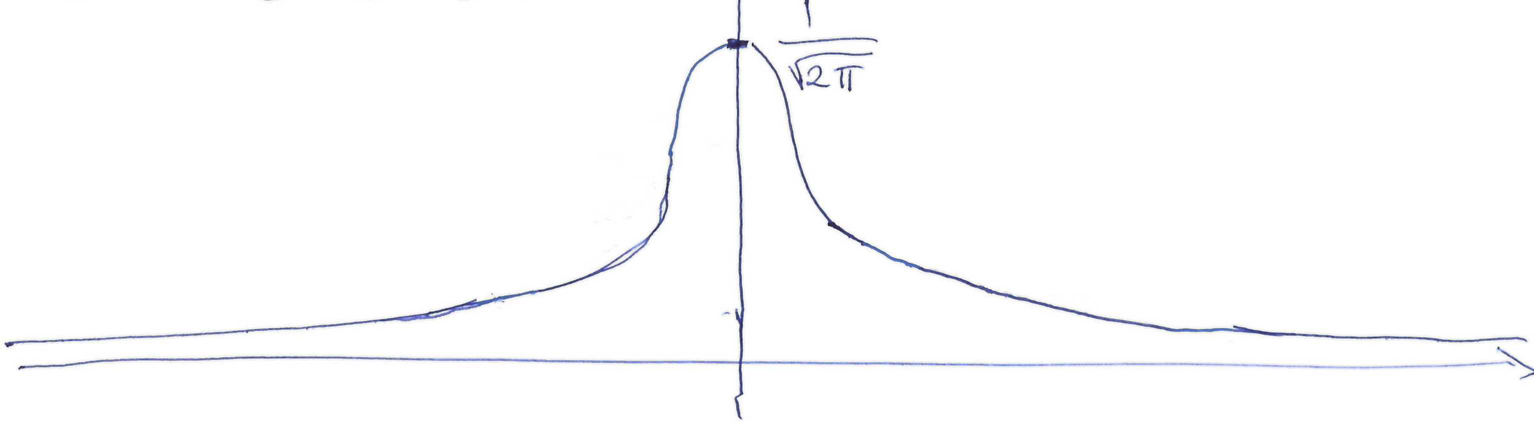
$\sigma > 0$

Das W-Maß $\boxed{n_{a,\sigma^2}}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$
mit der Dichtefunktion $f_{a,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$

heißt die Normalverteilung mit Erwartungswert a und Varianz σ^2. ("Erwartungswert" und "Varianz" werden später definiert.)

$\boxed{n_{0,1}}$ heißt die Standard-Normalverteilung.

Die Dichtefunktion $f_{a,\sigma^2}(x)$ ist die sogenannte $\boxed{\text{Gaußsche Glockenkurve}}$



Die Normalverteilung hat keine "schön-ausdrückbar" Verteilungsfunktion

<u>Check:</u> $\int_{-\infty}^{\infty} f_{a,\sigma^2}(x)\,dx = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \underset{y=\frac{x-a}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\sigma\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = ?$$

<u>Problem:</u> Stammfunktion von $e^{-\frac{y^2}{2}}$ ist nicht ausdrückbar als "elementare" Funktion.

<u>Lemma:</u> (Gaußsche Integral) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \sqrt{2\pi}$

<u>Beweis:</u>

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)^2 = \left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\cdot\left(\int e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right) = \iint e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}d(x,y) =$$

$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{r^2}{2}}r\,d(r,\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr = 2\pi\cdot\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= 0-(-2\pi) = \underline{\underline{2\pi}}$$

$\square$

Proposition: $\forall (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ W-Raum

$F = F_{\mathbb{P}}$ ist ~~Verteilungsfunktion~~

Dann existiert eine ZV $\cancel{Q}$ $Z:(0,1) \to \mathbb{R}$ auf $\left((0,1), \mathcal{B}_{(0,1)}, \mathcal{U}_{(0,1)}\right)$

mit $F = F_Z$ (und also auch $\mathbb{P} = \mathbb{P}_Z$),

nämlich die Quantil Transformation

$$Z(u) = \inf\{c \in \mathbb{R} : F(c) \geq u\}, \quad u \in (0,1)$$

$$= \inf F^{-1}(u) \text{ (Bem.: wenn } F \text{ strikt mon} \Rightarrow Z = F^{-1})$$

Beweis:

$\forall u \in (0,1)$ $Z(u) \in \mathbb{R}$, (weil $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \Rightarrow Z(u) < \infty$

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \Rightarrow Z(u) > -\infty$)

• $\boxed{Z(u) \leq x \iff u \leq F(x)}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Def von $Z(u) \Rightarrow \exists\, c_1, c_2, \ldots \searrow Z(u)$ s.d. $F(c_i) \geq u$

F ist rechtsstetig $\Rightarrow F(c_i) \to F(Z(u)) \Rightarrow \boxed{F(Z(u)) \geq u}$

$Z(u) \leq x \Rightarrow F(Z(u)) \leq F(x) \Longrightarrow u \leq F(x)$

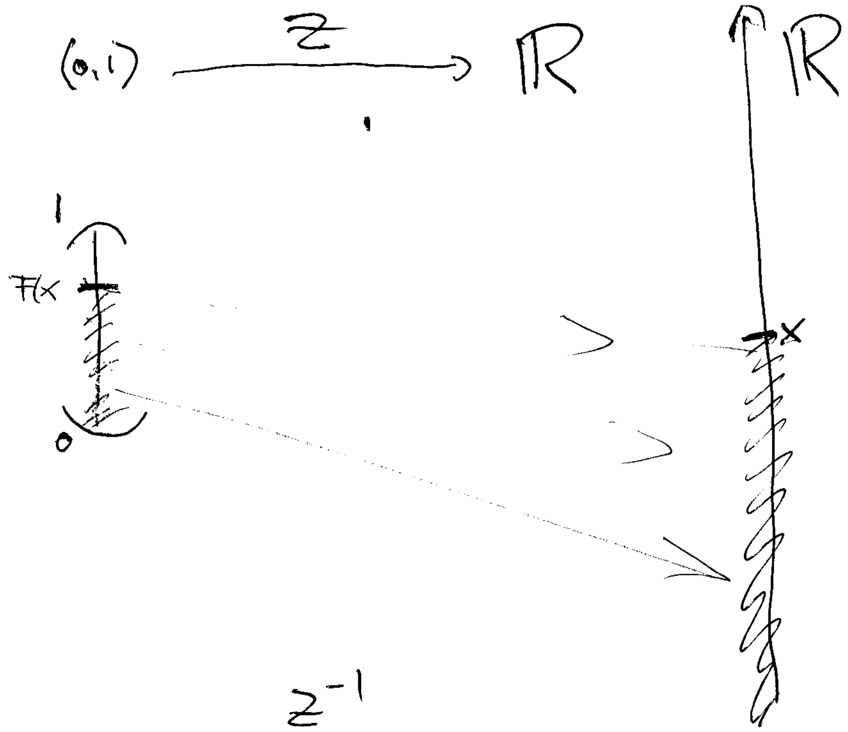
F ist monotone steigend

$\boxed{\Leftarrow}$ $u \leq F(x) \Rightarrow x \geq Z(u)$ (von Def Z)

• Folgt $Z^{-1}((-\infty, x]) = \{u \in (0,1) : Z(u) \leq x\} = (0, F(x)] \cap (0,1) \in \mathcal{B}_{(0,1)}$

$\boxed{\Rightarrow Z \text{ ist eine ZV}}$

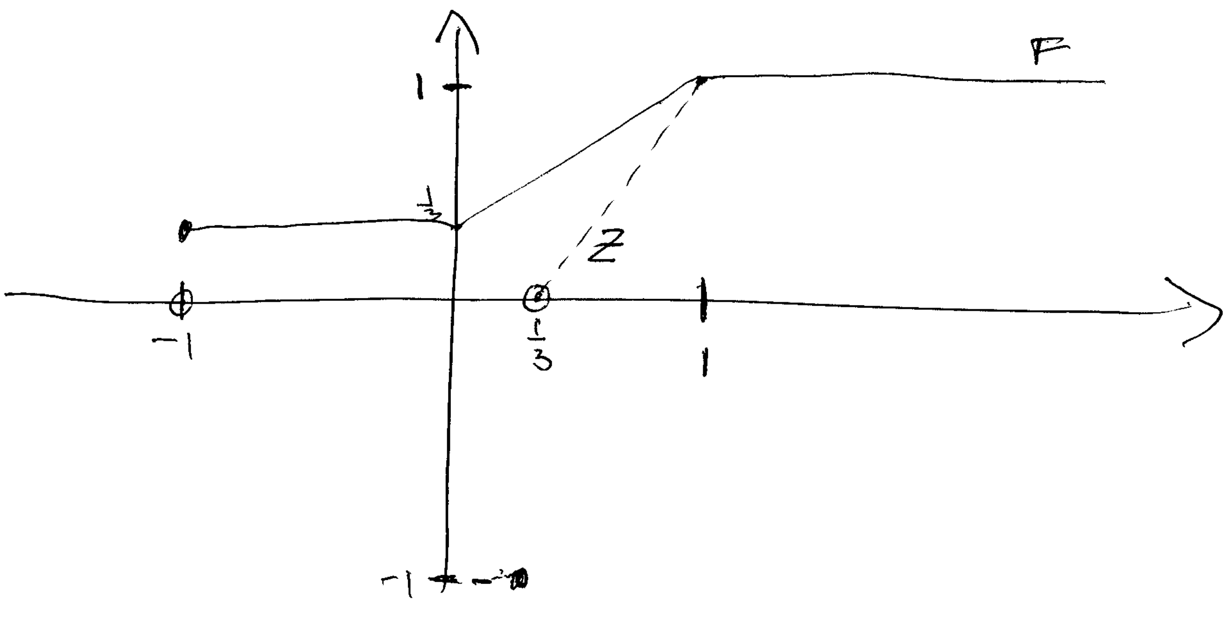
$$\Rightarrow \underline{F_Z(x)} = \mathbb{P}_Z((-\infty, x]) = \mathcal{U}_{(0,1)}(Z^{-1}(-\infty, x]) = \mathcal{U}_{(0,1)}((0, F(x)) = \underline{F(x)}$$



$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_{(0,1)} \arrow[d, "U_{(0,1)}"'] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \arrow[l, "Z^{-1}"'] \arrow[dl, "\mathbb{P}_Z"] \\
{[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

<u>Beispiel</u>:

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\,\delta_{-1} + \frac{2}{3}\,U_{(0,1)} \quad \text{auf } (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$



Korolar: (Simulation ein nach $\mathbb{P}$ verteilt $x \in \mathbb{R}$)

- Erzeuge ein gleichverteilte $y \in (0,1)$
- Ausgabe $Z(y)$ $\rightsquigarrow$ verteilt durch $\mathbb{P}$

Beweis: $\mathcal{U}_{(0,1)}(\{y : Z(y) \leq a\}) = \mathcal{U}_{(0,1)}(\{y : y \leq F(a)\})$

$$= F(a) = \mathbb{P}(\{x : x \leq a\})$$

Beispiel: Exponentialverteilung zu erzeugen

$\lambda > 0 \qquad \Omega = (0,\infty)$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

- Erzeuge gleichverteilte $x \in (0,1)$
- $y = 1 - e^{-\lambda x} \rightsquigarrow 1 - y = e^{-\lambda x}$

$$\ln(1-y) = -\lambda x$$

$$\boxed{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)} = x \quad \text{ausgeben}$$

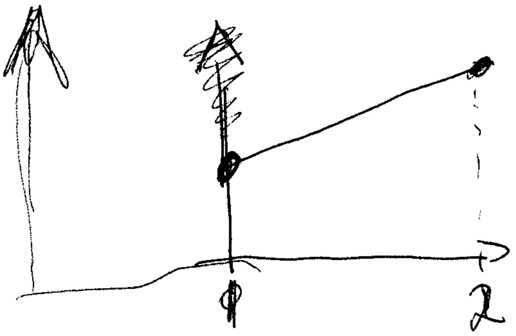
__Beispiel__ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$

Sei $\rho : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$

und $\mathbb{P}_\rho$ das zugehörige W-Maß.

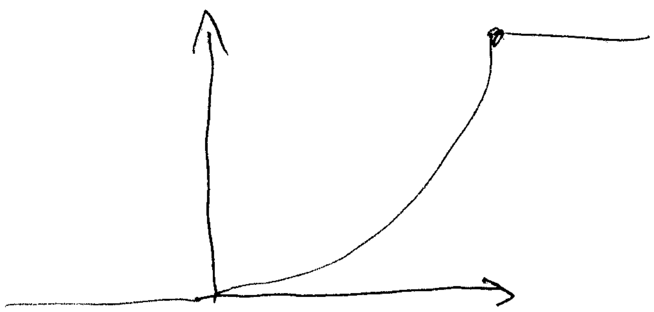
Dann $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(y)\,dy$ ist die zugehörige Verteilungsfunktion

~~und~~



$\rho(x) = \frac{2}{3}x$ auf $[1,2]$

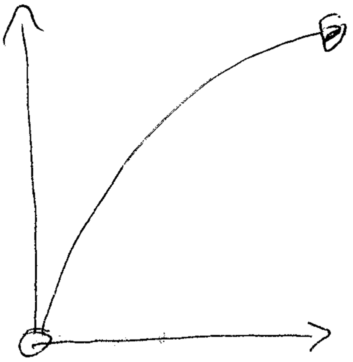
$\rho(x) = 0$ $\quad x \notin [1,2]$



$x \in [1,2]$

$F(x) = \frac{1}{3}y^2\Big|_1^x = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}$

$\int_1^x \frac{2}{3}y\,dy$



$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}$

$\sqrt{3y+1} = x$

$Q(y) = 1 + \sqrt{1+3y}$