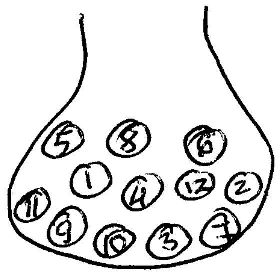
4 Grundlegende Abzählungsprobleme

Urnenmodelle: N numerierte Kugeln

Wir ziehen Kugeln n-mal aus



Varianten:

Ziehen: mit oder ohne Zurücklegen

Ergebnis: geordnet oder ungeordnet

(Das heißt, wollen wir das Endergebnis der n Ziehens als ein Tupel oder als eine Menge betrachten?)

1.

$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Ziehen:} & \text{mit Zurücklegen} \\ \text{Ergebnis:} & \text{geordnet} \end{array}}$

~~Ergg~~ Mögliche Ergebnisse sind n-Tupel mit Koordinaten von $[N]$

$$\{(x_1, \dots, x_n) : \forall i \in [n] \quad \underbrace{x_i}_{\text{Ergebnis der } i^{\text{te}} \text{ Ziehen}} \in [N]\} = [N]^n$$

Produktregel $\Rightarrow \left|[N]^n\right| = \left|[N]\right|^n = \boxed{N^n}$

__Beispiel:__ In einem Staat bestehen Autokennzeichen aus fünf Buchstaben.
Wie viele mögliche gibt es?

Urne $\rightsquigarrow \{A, B, C, D, \dots, X, Y, Z\}$

$N = 26$

$n = 5$ Ziehen $\rightsquigarrow$ Positionen in Autokennzeichen ␣␣␣␣␣

__Was zählen wir ab?__

Menge $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{A, B, \dots, X, Y, Z\}\}$

$= \{A, B, \dots, X, Y, Z\}^5$

Produktregel $\Rightarrow \left|\{A, \dots, Z\}\right| = 26^5$

2. $\boxed{\text{Ziehen: \underline{ohne} Zurücklegen} \quad \text{Ergebnis: geordnet}}$

Mögliche Ergebnisse sind n-Tupel mit paarweise verschiedenen Koordinaten aus $[N]$

$\boxed{\text{Was ist die Menge die wir abzählen?}}$ $\#$<u>n-Permutationen</u>

$$[N]^{\underline{n}} := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in [N] \ \forall i \in [n], \quad x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$$

$\boxed{\underline{\text{Behauptung}}}$: $\boxed{\left|[N]^{\underline{n}}\right| = \dfrac{N!}{(N-n)!}}$ $\left(= N\cdot(N-1)\cdots(N-n+1)\right)$

<u>Beweis:</u> Induktion nach n.

<u>$n=1$</u> $\leadsto$ $[N]^{\underline{1}} = [N] \Rightarrow \left|[N]^{\underline{1}}\right| = \left|[N]\right| = N = \dfrac{N!}{(N-1)!}$

<u>$n>1$</u> Klassifizieren wir die Elemente von $[N]^{\underline{n}}$ nach ihren ersten Koordinaten und benutzen wir die Summenregel,

$$S_j := \{(\underset{\overset{\shortparallel}{j}}{x_1}, \dots, x_n) \in [N]^{\underline{n}} : x_1 = j\} \Rightarrow [N]^{\underline{n}} = \dot{\bigcup_{j=1}^{N}} S_j$$

Es gibt Bijektion:
$$\begin{array}{ccc} S_j & \longleftrightarrow & ([N]\setminus\{j\})^{\underline{n-1}} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ (j, x_2, \dots, x_n) & \longleftrightarrow & (x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

$$\Rightarrow |S_j| = \left|([N]\setminus\{j\})^{\underline{n-1}}\right| = (N-1)^{\underline{n-1}} \quad \text{nach Induktion}$$

Summenregel

$$\Rightarrow |N^{\underline{n}}| = \left|\dot{\bigcup_{j=1}^{N}} S_j\right| = \sum_{j=1}^{N} |S_j| = N\cdot(N-1)^{\underline{n-1}} = N(N-1)\cdots(N-1-(n-1)+1)$$
$$= N^{\underline{n}}$$

Beispiel: Wahl des Vorstand in einem Verein

Funktionen: Präsident, Vertreter, Schriftführer
Schatzmeister

Mitglieder: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J,

Alle können höchstens EINE Funktion haben.

Kugeln $\rightsquigarrow$ Mitglieder

Ziehen $\rightsquigarrow$ Funktionen

Reihenfolge wichtig ist weil:
das Ergebnis der erste Ziehen ist Präsident
-"- zweite Vertreter
⋮ ⋮

Ohne Zurücklegen: wegen

Was ist die Menge die wir abzählen?

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{10!}{6!}}$$

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich ist es, dass in unserer Vorlesung Leute mit gleichem Geburtstag sind?

Schwierig direkt zuberechnen. Trick: Gegenteil zurechnen

- Wie wahrscheinlich ist es, dass es passiert nicht, das heißt JEDER einen verschiedenen Geburtstag hat?

Vereinfachtes Model:

Jeder Tag (außer Feb 29) hat die gleiche $\frac{1}{365}$ Chance.

Es gibt 100 Leute im Campus Management

$\Omega = \{\text{Jan } 1.-31., \text{Feb } 1-28., \text{Mar } 1.-31., \dots\}^{100} = \{(g_1, \dots, g_i, \dots, g_{100})\}$

g_i: Geburtstag von i^{te} Student

Laplaceraum auf Ω

ALLE Möglichkeiten: 365^{100}

GÜNSTIGE Möglichkeiten: $\frac{365!}{(365-100)!}$

100 mal ziehen aus der Urne der 365 Tagen, mit Zurücklegen (ALLE) und ohne Zurücklegen (GÜNSTIGE)

W-keit von keine zwei mit gleichen Geburtstag $= \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-r+1)}{365^r} = \prod_{i=0}^{r-1}\left(1 - \frac{1}{365-i}\right)$

Für $r = 100$ $\rightsquigarrow \approx 0{,}0000005 = 5 \cdot 10^{-7}$

Schon Für $r = 23$ $\rightsquigarrow \approx 0{,}493 < \frac{1}{2}$

③ $\boxed{\text{Ziehen: ohne Zurücklegen; Ergebnis: ungeordnet}}$

Mögliche Ergebnisse: n-elementige Teilmengen von $[N]$

Was ist die Menge die wir abzählen?

$$\binom{[N]}{n} := \{T : T \subseteq [N], |T| = n\}$$

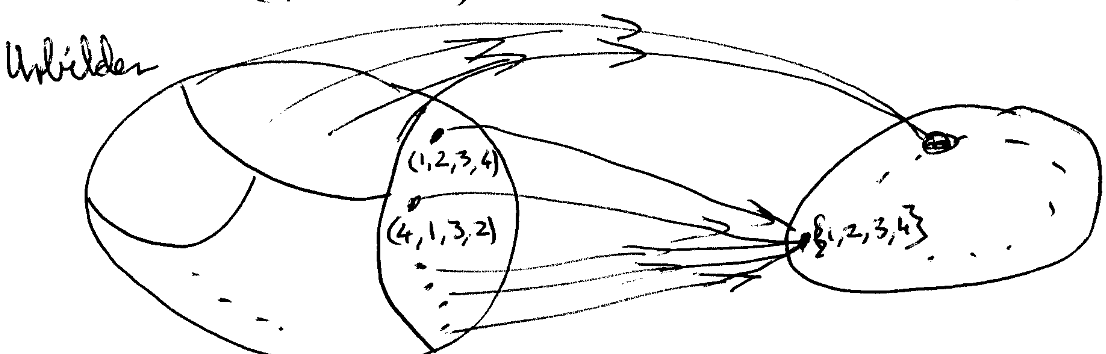
Behauptung: $\left|\binom{[N]}{n}\right| = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ für $N \geq n$.

Erinnern! Wir haben $\binom{N}{n} := \left|\binom{[N]}{n}\right|$ definiert!

Beweis: Definieren wir Funktion

$$F : [N]^n \longrightarrow \binom{[N]}{n}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \{x_1, \dots, x_n\}$$



Für jede $\{x_1, \dots, x_n\} \in \binom{[N]}{n}$ das Urbild $F^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\}) =$

$= \{x_1, \dots, x_n\}^n$ enthält die n-Permutationen von $x_1, \dots, x_n$

Also hat $\underline{n!\ \text{Elemente}}$

$$[N]^n = \bigcup_{\{x_1,\dots,x_n\} \in \binom{[N]}{n}} F^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\}) \Longrightarrow \left|[N]^n\right| = \sum_{\{x_1,\dots,x_n\} \in \binom{[N]}{n}} \left|F^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})\right|$$

$$\left|[N]^n\right| = \frac{N!}{(N-n)!}$$

$$\sum_{\{x_1,\dots,x_n\}} \left|F^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})\right| = \sum_{\{x_1,\dots,x_n\}} n! = \left|\binom{[N]}{n}\right| \cdot n!$$

$$\frac{N!}{(N-n)!\,n!} = \left|\binom{[N]}{n}\right|$$

<u>Beispiel</u>: Wie viele (verschiedene) ausgefüllte Lottozettel gibt es?

Kugeln in Urne: 1, 2, ..., 49

n=6 Ziehen von verschiedenen Zahlen (<u>ohne</u> Zurücklegen)

- Ergebnis ist eine <u>Menge</u> (und <u>nicht</u> ein Tupel) weil für uns es ist egal welche Reihenfolge die Gewinnzahlen ~~..~~ vorkommen.

Anzahl der Möglichkeiten

$$\left|\binom{[49]}{6}\right| = \frac{49!}{6!\,43!} \quad (= 13.983.816)$$

(4.) **Ziehen: mit Zurücklegen**
Ergebnis: ungeordnet

Das Ergebnis soll eine Menge sein, aber wir müssen auch erlauben, dass beliebige Elemente MEHR als einmal vorkommen (was in einer einfachen Menge nicht erlaubt ist). ⇝ so-genannte Multimenge

Wie definiert man formal die n-elementige Multimenge von $[N]$?

- Wir brauchen n Elemente von $[N]$, aber für jedes Element $i \in [N]$ interessieren wir uns für die Anzahl k_i wir haben i ausgewählt.

$$\mathrm{Multi}\binom{[N]}{n} := \left\{ (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{N}_0^N : \sum_{i=1}^{N} k_i = n \right\}$$

weil wir brauchen n Elementen

Behauptung: $\left| \mathrm{Multi}\binom{[N]}{n} \right| = \binom{N+n-1}{n}$

Beweis: IDEE: Stellen wir uns die n Ziehungen als n Punkte in einer Reihe vor. Platzieren wir $N-1$ Stäbchen zwischen die Punkte, um zu signalisieren von welche bis welche Punkte gehören zu Kugel i.

$n = 14$
$N = 9$

| • | • • • || • • • • | • • ||| • • • •

$k_1 = 0$ $k_2 = 1$ $k_3 = 3$ $k_4 = 0$ $k_5 = 4$ $k_6 = 2$ $k_7 = k_8 = 0$ $k_9 = 4$

Plätze für n Punkte wählen

$(N-1)+n$ Objekte (n Punkte + $N-1$ Stäbchen) in $(N-1+n)$ Posi...

Beispiel (Bose - Einstein Verteilung)

Wie viele Weg gibt es n nicht unterschiedbar Teilchen in N verschiedenen (gleichartig aber unterschiedbar) "Fächern" zu platzieren?

Orts und Impulsraum in endliche viele Zellen zerlegt ist. Wie viele Zustand diese System haben kann?

Kugeln $\rightsquigarrow$ Fächern

Ziehen $\rightsquigarrow$ Teilchen

~ ungeordnet, ~~W~~eil es ist egal in welchem Reihenfolgen die Teilchen zu ihren Zellen gehen; nur die Endposition ist wichtig

~ mit Zurücklegen, weil ein Fach mehr als einmal vorkommen kann

Wir interessieren uns nur in der Anzahl k_i der Teilchen in Fach i $(\forall i)$

$$\left| \left\{ (k_1, \ldots, k_N) : \sum_{i=1}^{N} k_i = n \right\} \right| = ?$$