Lösungsvorschlag zum zwölften Übungszettel Stochastik I, WiSe 2013/2014

Aufgabe 2:
Lösung: Zuerst rufen wir uns noch einmal die relevanten Definitionen in Erinnerung. Für Zufallsvariablen $X, X_1, X_2, ...$ gilt

$$X_n \to X \text{ f. s. } \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\{\omega \mid \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1 \tag{1}$$

und

$$X_n \to X \text{ i.W. } \Leftrightarrow \lim \mathbb{P}\left(\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0 \;\; \forall \varepsilon > 0 \tag{2}$$

Wir betrachten nun einen abzählbaren Wahrscheinlichkeitsraum Ω und setzen oBdA voraus, dass $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt. (Andernfalls betrachte im folgenden die Atome des W'raumes statt der einzelnen Elementarereignisse.) Außerdem gelte oBdA $\mathbb{P}(\omega) > 0 \; \forall \omega \in \Omega$. (D.h. wir lassen alle Elementarereignisse, die keine Wahrscheinlichkeit haben, weg; sie treten ohnehin nie ein. Das geht natürlich nur, weil wir im diskreten Fall sind.)
Jetzt zum eigentlichen Beweis: Wir nehmen uns ein beliebiges, aber festes $\tilde{\omega} \in \Omega$. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{P}(\tilde{\omega}) > 0$.
Nach Voraussetzung gilt

$$\lim \mathbb{P}\left(\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0 \;\; \forall \varepsilon > 0$$

das heißt (Definition von Konvergenz gegen 0), dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) < \mathbb{P}(\tilde{\omega})$$

Wegen der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen kann $\tilde{\omega}$ also nicht in der linken Menge enthalten sein, d.h.

$$\tilde{\omega} \notin \{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \;\; \forall n \geq n_0$$

Damit aber haben wir gezeigt, da $\varepsilon > 0$ beliebig war:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } |X_n(\tilde{\omega}) - X(\tilde{\omega})| < \varepsilon$$

Das bedeutet aber per Def.

$$\lim X_n(\tilde{\omega}) = X(\tilde{\omega})$$

Da $\tilde{\omega}$ ein beliebiges Element aus Ω war gilt also:

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \mid \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = \mathbb{P}(\{\tilde{\omega} \mid \tilde{\omega} \in \Omega\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

und das war zu zeigen.

Aufgabe 3:

Lösung: Wir betrachten oBdA nur eine der beiden Garderoben. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Besucher, die diese Garderobe wählen, an. Wenn

$$30 \leq X \leq 170$$

gilt, dann ist keine der Garderoben überlastet.

Um abzuschätzen, ob 170 Garderobenplätze mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 ausreichen, benutzen wir die Ungleichung von Chebyshev, die besagt:

Sei X eine reelle Zufallsvariable, für die $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$ existieren. Dann gilt für $a > 0$:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

In unserem Fall gilt:

$$\mathbb{E}(X) = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100, \quad \mathbb{V}(X) = 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 50, \quad a = 71$$

(Falls man das nicht sofort sieht: Schreibe $X = \sum_{i=1}^{200} X_i$, wobei X_i die Zufallsvariable sein soll, die 1 angibt, wenn der Besucher i unsere Garderobe wählt (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) und 0, wenn nicht. Die X_i sind also Bernoulliverteilt zum Parameter $p = \frac{1}{2}$. Damit gilt für alle i: $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{V}(X_i) = p(1-p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Will man nun den Erwartungswert von X ausrechnen, nutzt man, dass dieser linear ist. Da die Gäste unabhängig ihre Garderoben wählen, sind auch die X_i unabhängig und damit ist auch in diesem Fall die Varianz linear. So erhalten wir die obigen Werte.) $a = 71$ ist so gewählt, dass

$$|X - 100| \geq 71 \quad (= |X - \mathbb{E}(X)| \geq a)$$

zu

$$X \notin [30, 170]$$

äquivalent ist. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(30 \leq X \leq 170) &= 1 - \mathbb{P}(X \notin [30, 170]) \\ &= \mathbb{P}(|X - 100| \geq 71) \leq \frac{50}{71^2} = \frac{50}{5041} < 0.01\end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass unsere Garderobengröße nicht ausreicht, geringer als 1 Prozent. Das wollten wir zeigen.

Bemerkung: Die Chebyshev-Ungleichung ist natürlich nur eine Approximation, die Schranke ist nicht scharf. Wer die entsprechende Wahrscheinlichkeit in Mathematica, WolframAlpha o.ä. ausrechnet, wird feststellen, dass bereits deutlich weniger Garderobenhaken ausreichen werden.

Aufgabe 4:
Lösung: Nach Definition der Konvergenz in Verteilung gilt also

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

für alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen F_X stetig ist.
Wir wählen jetzt für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\varepsilon_m > 0$, so dass $\varepsilon_m \to 0$, bzw. $c - \varepsilon_m \nearrow c$ gilt. Außerdem soll F_X in $x = c - \varepsilon_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ stetig sein. Das ist möglich, da F_X höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.)
Aus der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen folgt dann:

$$\mathbb{P}(X < c) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(X \leq c - \varepsilon_m) \tag{3}$$

denn $A_m = \{\omega \mid X(\omega) \leq c - \varepsilon_m\}$ ist eine aufsteigende Folge von Ereignissen.
Nach Voraussetzung gilt aber nun für jedes festes $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq c - \varepsilon_m) &= F_X(c - \varepsilon_m) \\
&= \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(c - \varepsilon_m) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq c - \varepsilon_m) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, denn

$$\mathbb{P}(X_n \leq c - \varepsilon_m) \leq \mathbb{P}(X_n < c) = 1 - \mathbb{P}(X_n \geq c) = 1 - 1 = 0$$

Damit folgt aus Formel (3) also

$$\mathbb{P}(X < c) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(X \leq c - \varepsilon_m) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0$$

und damit $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$.