Lösungsvorschlag zum ersten Übungszettel Stochastik I, WiSe 2013/2014 (von Tilman)

Aufgabe 4:
Lösung: Wir wollen zeigen:

$\mathbb{P}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 1 \wedge b + c = 1 \wedge b, c \in [0, 1]$

Beweis: Denkt daran, beide Richtungen zu zeigen, wir fangen mit $\Rightarrow$ an.

- Es gilt $x_0, y_0 \notin \emptyset$. Nach Definition von $\mathbb{P}$ gilt dann $\mathbb{P}(\emptyset) = a$. Wenn $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß sein soll, dann muss $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ gelten. Also gilt $a = 0$.

- Es gilt $x_0 \in \Omega \wedge y_0 \in \Omega$ und deswegen $\mathbb{P}(\Omega) = d$. Da $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt natürlich $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und damit $d = 1$.

- Da gelten soll $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind $\{x_0\}, \{y_0\}$ und $\{x_0, y_0\} \in \mathcal{E}$. Nach Definition von $\mathbb{P}$ gilt $\mathbb{P}(\{x_0\}) = b, \mathbb{P}(\{y_0\}) = c, \mathbb{P}(\{x_0, y_0\}) = d = 1$. Da die beiden einpunktigen Mengen disjunkt sind, gilt nach Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes: $\mathbb{P}(\{x_0\}) + \mathbb{P}(\{y_0\}) = \mathbb{P}(\{x_0, y_0\})$, also $b + c = 1$.

- Wenn $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt natürlich $a, b, c, d \in [0, 1]$, denn a, b, c, d sind Wahrscheinlichkeiten.

Nun betrachten wir die Rückrichtung $\Leftarrow$, dazu müssen wir die Axiome eines Wahrscheinlichkeitsmaßes für $\mathbb{P}$ mit den angegebenen Werten für a, b, c und d nachrechnen.

- Es gilt $\mathbb{P}(\Omega) = d = 1$. Damit ist das erste Axiom bereits erfüllt.

- Wir betrachten nun eine abzählbare Folge $E_1, E_2, ... \in \mathcal{E}$ von paarweise disjunkten Ereignissen: Wir wollen zeigen $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$. Dazu müssen wir einige Fälle unterscheiden.

  Fall 1: Weder x_0, noch y_0 liegen in einem der E_i. Dann liegen sie auch nicht in ihrer Vereinigung. Also gilt: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = a = 0$ und $\mathbb{P}(E_i) = a = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit folgt $0 = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0$ und die obige Gleichung gilt.

  Fall 2: x_0 und y_0 liegen in genau (Disjunktheit!) einem E_k und somit auch in der Vereinigung. Dann gilt $\mathbb{P}(E_k) = d = 1, \mathbb{P}(E_i) = a = 0$ für alle $i \neq k$ und $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = d = 1$. Die Summe besteht also nur aus Nullen und einer Eins. Damit gilt die obige Gleichung erneut.

  Fall 3: x_0 liegt in genau einem E_k und y_0 liegt in genau einem (von E_k

verschiedenen) E_l. (Erneut beachte man, dass die E_i disjunkt sind.) Dann liegen beide in der Vereinigung und es gilt: $\mathbb{P}(E_k) = b$, $\mathbb{P}(E_l) = c$, $\mathbb{P}(E_i) = a = 0$ für alle $k \neq i \neq l$ und daher $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = b + c$ und $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = d = 1$. Die obige Gleichung reduziert sich zu $b + c = 1$ und das ist nach Voraussetzung wahr.

Fall 4: x_0 liegt in genau einem E_k und y_0 in keinem der E_i. Dann enthält die Vereinigung auch nur x_0 und nicht y_0. Die obige Gleichung hat in diesem Fall die Form $b = b$ und ist somit erfüllt.

Fall 5: x_0 liegt in keinem der E_i, y_0 liegt in genau einem E_k. Analog zu Fall 4 reduziert sich die Gleichung zu $c = c$.

Damit sind alle Fälle abgehandelt und $\mathbb{P}$ ist somit ein Wahrscheinlichkeitsmaß.