Lösungsvorschlag zum zweiten Übungszettel Stochastik I, WiSe 2013/2014 (von Tilman)

Aufgabe 1b:
Lösung Teil 1: Wir wollen zunächst zeigen, dass die Menge der Atome eine Partition von Ω ist. Dazu brauchen wir

- Jedes $\omega \in \Omega$ liegt in höchstens einem Atom. (Das wurde in Aufgabenteil a) gezeigt.)
- Jedes $\omega \in \Omega$ liegt in mindestens einem Atom. (Das zeigen wir jetzt.)

Wir betrachten also $\omega \in \Omega$ und suchen ein Atom, in dem ω liegt. Ein natürlicher Kandidat dafür ist

$$A(w) := \bigcap_{E \in \mathcal{E}, \omega \in E} E$$

der Schnitt über alle Ereignisse, die ω enthalten, denn das ist das kleinste Ereignis, welches ω enthält.
$A(\omega)$ ist ein Atom, denn: Sei $\emptyset \neq C \subsetneq A(\omega)$ mit $C \in \mathcal{E}$. Dann gilt:
Fall 1: $\omega \in C$. Dann gilt aber $C \in \{E \in \mathcal{E} | \omega \in E\}$ und somit $A(\omega) \subseteq C$ nach Definition von $A(\omega)$ und den Eigenschaften des Schnittes. Widerspruch.
Fall 2: $\omega \notin C$. Dann gilt $\omega \in \Omega \setminus C$ und somit $\Omega \setminus C \in \{E \in \mathcal{E} | \omega \in E\}$. Dann gilt wieder nach Definition von $A(\omega)$: $A(\omega) \subseteq \Omega \setminus C$ und dann kann nicht gelten $C \subsetneq A(\omega)$. Widerspruch.
Also ist $A(\omega)$ tatsächlich ein Atom.

Problem: Der Schnitt, mit dem wir $A(\omega)$ definiert haben, muss nicht abzählbar sein. (Bsp: $\Omega = \mathbb{N}$, dann ist $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ nicht abzählbar.) Wir brauchen also eine Konstruktion von $A(\omega)$, welche abzählbar ist. (Andernfalls ist unsere Definition ist nicht sinnvoll.)
Deshalb gehen wir wie folgt vor. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$. Für jedes ω_i wählen wir ein $E_i \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft $\omega \in E_i$ und $\omega_i \notin E_i$, falls ein solches Ereignis existiert, andernfalls setze $E_i := \Omega$. Dann gilt $A(\omega) = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ Wenn wir das gezeigt haben, haben wir $A(\omega)$ durch einen abzählbaren Schnitt erzeugt.
Wir zeigen also

$$\bigcap_{E \in \mathcal{E}, \omega \in E} E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Die Inklusion $\subseteq$ ist nach Konstruktion klar, wir müssen nur $\supseteq$ zeigen: Sei $\omega_i \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Das bedeutet es gibt kein E_i, welches ω und ω_i trennt, d.h. $\omega \in E_i$ und $\omega_i \notin E_i$. Umgekehrt gilt also: Für alle $E \in \mathcal{E}$ mit $\omega \in E$ gilt auch $w_i \in E$. Also gilt $\omega_i \in \bigcap_{E \in \mathcal{E}, \omega \in E} E$.

Lösung Teil 2: Es bleibt noch zu zeigen, dass die Menge aller möglichen Vereinigungen der Atome gerade $\mathcal{E}$ ist. Dazu stellen wir fest:

- Jede beliebige Vereinigung von Atomen ist eine abzählbare (es gibt zu jedem $\omega \in \Omega$ höchstens ein Atom, also gibt es nur abzählbar viele Atome), also liegt jede Vereinigung von Atomen in $\mathcal{E}$.

- Es bleibt zu zeigen, dass jedes $E \in \mathcal{E}$ (disjunkte) Vereinigung von Atomen ist: Sei $E \in \mathcal{E}$. Dann gilt:

  $$E = \bigcup_{\omega \in E} A(\omega)$$

  Beweis dazu: Die Inklusion $\subseteq$ ist klar, wir brauchen nur $\supseteq$ zu zeigen. Angenommen $E \subsetneq \bigcup_{\omega \in E} A(\omega)$. Dann gibt es ein $\omega_0 \in E$ mit $A(\omega_0) \nsubseteq E$. Dann gilt aber $\emptyset \neq E \cap A(\omega_0) \subsetneq A(\omega_0)$ und das ist ein Widerspruch, denn $A(\omega_0)$ ist ein Atom.