

Lösungsvorschlag zum fünften Übungszettel Stochastik I, WiSe 2013/2014  
(von Tilman)

**Aufgabe 2:**

**Lösung:** Um gleichverteilt einen vom Laserpointer ausgehenden Strahl zu erzeugen, wählen wir gleichverteilt einen Winkel  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$  und betrachten den Strahl, der vom Laserpointer im Winkel  $\alpha$  (zur  $y$ -Achse) in Richtung des ersten Quadranten verläuft. (Eine Skizze ist hilfreich.)

Bemerkung: Eigentlich müssten wir  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  gleichverteilt ziehen, um in alle Richtungen zu strahlen, in denen der Laserpointer die  $x$ -Achse trifft, da uns aber der Abstand zum Nullpunkt interessiert und das Problem symmetrisch ist, beschränken wir uns auf den ersten Quadranten.

Einfache geometrische Überlegungen zeigen, dass der Punkt  $x$ , an dem Laserpointer, ausgestrahlt im Winkel  $\alpha$ , auf die  $x$ -Achse trifft, durch

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{30} \iff \alpha = \arctan\left(\frac{x}{30}\right)$$

gegeben ist.

Sei nun  $X(\alpha)$  die Zufallsvariable, die einem zufälligen Winkel  $\alpha$  ihren zugehörigen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse zuordnet. Dann gilt für die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\alpha \leq \arctan\left(\frac{x}{30}\right)\right) = \mathbb{P}\left([0, \arctan\left(\frac{x}{30}\right))\right)$$

Weil  $\alpha$  gleichverteilt in  $[0, \frac{\pi}{2})$  sein soll, gilt

$$\mathbb{P}\left([0, \arctan\left(\frac{x}{30}\right))\right) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{30}\right)}{\frac{\pi}{2}}$$

also gilt

$$F(x) = \frac{2 \arctan\left(\frac{x}{30}\right)}{\pi}$$

Und für die Dichtefunktion gilt dann:

$$f(x) = F'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{30}{x^2 + 900}$$

Zur Simulation: Erzeuge  $x \in [0, 1]$  gleichverteilt. Dann berechne

$$y = 30 \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) = F^{-1}(x)$$

Dann ist  $y$  gemäß  $f$  verteilt. (D.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $y$  ist durch das von  $f$  induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben.)