

DOZENT: PROF. TIBOR SZABÓ,
TUTOREN: TILMAN MIRSCHEL, OLAF PARCZYK, YIZHENG YUAN

Material

Jede Woche sollten Sie die entsprechenden Abschnitte von dem Buch "Elementare Stochastik" nachlesen und verstehen. Dies ist sehr wichtig, damit Sie Unklarheiten aus der Vorlesung klären können und Ihre Kenntnis des Materials festigen. Für diejenigen die mehr wissen wollen, ist das Lesen aller Ergänzungsabschnitte und Anhänge empfohlen.

Für die Klausur müssen Sie die Definitionen und Sätze auswendig können, und die Beweise so gut verstehen, dass Sie diese wirklich selbst ausführen können (Idealerweise lernen Sie den Beweis **nicht** auswendig, sondern verstehen die Ideen und Methoden, so dass Sie in der Lage sind, den Satz selbst zu beweisen.). Sie sollten mit dem Lernen jetzt anfangen, andernfalls schaffen Sie das am Ende nicht.

Woche 1. Lesen und verstehen: Abschnitt 1.1, 1.2, 1.3

Was ist eine σ -Algebra? Was ist die kleinste, was ist die größte σ -Algebra auf einer Menge? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß? Was ist ein Elementarereignis, was ist ein Ereignis? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Was ist eine disjunkte Folge von Teilmengen einer Menge? Wichtige Eigenschaften von σ -Algebren: welche Mengenoperationen verlassen eine σ -Algebra nicht? (Satz 1.3.1)

Woche 2. Lesen und verstehen: Abschnitt 1.3, 1.4, 1.5

Wichtige Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen (Satz 1.3.2). Was versteht man unter der "Subadditivität" eines Wahrscheinlichkeitsmaßes? Was bedeutet die "Stetigkeit nach oben" bzw. die "Stetigkeit nach unten" für ein Wahrscheinlichkeitsmaß? Was ist die von einem Mengensystem erzeugte σ -Algebra? (Satz 1.4.1) Wie kann man sie "explizit" definieren? Explizite Beschreibung der erzeugten σ -Algebra von endlichen Mengensystemen und der erzeugten σ -Algebra von einelementigen Teilmengen einer beliebigen Menge Ω . Was ist eine Borelmenge in \mathbb{R} ? Beispiele von Borelmengen. (abgeschlossene, halboffene Intervalle, rationale Zahlen, Urbilder von Intervallen unter stetigen Funktionen ...)

Woche 3. Lesen und verstehen: Abschnitt 1.5, 1.6 (erste Teil), 2.1, 2.2

Die σ -Algebra der Borelmengen wird von dem Mengensystem der offenen Intervalle erzeugt. Verschiedene abzählbare Erzeugern von der σ -Algebra der Borelmengen (Satz 1.5.2, Beweis von einem Teil im Tutorium). Eigenschaften von Borelmengen (Urbilder von Borelmengen sind Borelmengen und Korolläre; Satz 1.6.2). Wie definiert man Borelmengen in \mathbb{R}^n ? Was ist ein diskreter W-Raum? Wie kann man alle diskrete W-Räume angeben (Satz 2.1.1)? Was ist ein Laplaceraum, ein Bernoulli-Raum? Wie definiert man die Poissonverteilung und die geometrische Verteilung?

Was ist eine Dichtefunktion? Wie definiert man einen W-Raum durch eine Dichtefunktion (Satz 2.2.1 ohne genauen Beweis)? Wie ist die Gleichverteilung auf einem beschränkten Intervall definiert? Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 vs. unmögliche Ereignisse. Es gibt Mengen die nicht Borelmengen sind (Auswahlaxiom!).

Woche 4. Lesen und verstehen: Abschnitt 2.2, 2.3 (erste Teil), 2.4

Gleichverteilung auf beschränkten Teilmengen von \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^n (Flächeninhalt- und Volumenverhältnis). Die Wahrscheinlichkeit von einem gleichverteilt ausgewählten zufälligen Punkt in der Nähe des Randes eines Hyperquadrates zu sein. Buffonsche Nadelexperiment um die Zahl π zu approximieren. Monte Carlo Verfahren. Wie ist die Exponentialverteilung und die Normalverteilung definiert? Wie benutzt man die Tabelle der Normalverteilung und warum braucht man eine Tabelle um die Wahrscheinlichkeiten auszurechnen? Was ist die zu einem W-Maß \mathbb{P} gehörige Verteilungsfunktion? Wie kann man Verteilungsfunktion von W-Maßen auf beliebigen Borelmengen in \mathbb{R} auf ganz \mathbb{R} auffassen? Beispiele: Würfel, Gleichverteilung auf $[0, 3]$. Welche Dichte hat ein Maß \mathbb{P} , für das die Verteilungsfunktion $F_{\mathbb{P}}$ stetig differenzierbar ist? (Lemma 2.4.2) Angenommen, man kann die Gleichverteilung simulieren, wie kann man dann einen Raum mit Dichtefunktion simulieren (Satz 2.4.3)? Beispiele: wie simuliert man die Verteilung mit Dichtefunktion $f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ auf $\Omega = [3, 5]$? Wie simuliert man die Exponentialverteilung? Wie kann man die Normalverteilung simulieren?

Woche 5. Lesen und verstehen: Abschnitt 3.1, 3.2

Was ist eine Zufallsvariable? Beispiele: Lotto, zwei Würfel, Abstand zum Nullpunkt. Warum muß man die eher technische Bedingung an die Urbilder der Elemente der Bild- σ -Algebra fordern? Was versteht man unter der Indikatorfunktion eines Ereignisses? Durch welche einfache Bedingung sind reellwertige Zufallsvariables und Zufallsvariables mit höchstens abzählbar viele Werten charakterisiert (Satz 3.1.2)? Lineare Kombinationen, Produkte, und Quotiente von Zufallsvariablen, Suprema, und punktweise Limites von Folgen von Zufallsvariablen sind wieder Zufallsvariable (Satz 3.1.4). Was ist ein von Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsraum? Was ist zu eine reelwertige Zufallsvariable gehörige Verteilungsfunktion? Beispiele: Augensumme von zwei Würfeln, Indikatorfunktion, Abstand zum Nullpunkt. Wie kann man die Dichtefunktion von einem W-Maß berechnen welches von einer "schönen" (stetig differenzierbare, streng monotone steigende, mit stetig differenzierbar inverse) Zufallsvariable induziert ist auf einem W-Raum mit stetiger Dichtefunktion (Satz 3.2.3)?

Woche 6. Lesen und verstehen: Abschnitt 3.2, 3.3

Beispiele für Dichtefunktion der induzierte W-Raum: (konkretes; Simulationssatz) Wie ist der Erwartungswert definiert für diskrete Räume? Und für Räume mit Dichten? Beispiel für Zufallsvariable wobei Erwartungswert nicht existiert (Warum?) Welchen Erwartungswert haben Gleichverteilung, Bernoulliverteilung, Poissonverteilung, geometrische Verteilung? Erwartungswert von Exponentialverteilung und Normalverteilung (Hausaufgabe)? Einfache Eigenschaften von Erwartungswert. Wie kann man den Erwartungswert von X durch \mathbb{P}_X ausdrücken? Was sind Varianz und Streuung einer Zufallsvariablen? Beispiele: Laplaceverteilung, Exponentialverteilung.

Woche 7. Lesen und verstehen: Abschnitt 3.3, 3.4 3.5

Einfache Eigenschaften von Varianz und Streuung (Satz 3.3.9). 4 grundlegende Zählprobleme (Aus einer n -elementigen Menge k Elemente auswählen, so dass: Reihenfolge wichtig/unwichtig und Wiederholung möglich/unmöglich ist.) Jeweils typische Beispiele. Inklusion-Exklusion Satz. Geburtstagsparadox. hypergeometrische Verteilung, Beispiel: Lotto 4-er. Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung.

Woche 8. Lesen und verstehen: Abschnitt 3.5, 4.1, 4.2, 4.3 (Anfang)

Maximum-likelihood Schätzung, Beispiel: 10000 Kugeln, unbekannte Anzahl der roten Kugeln; bedingte Wahrscheinlichkeit von Ereignis A unter Ereignis B , Beispiele: Die W -keit von A kann steigen, sinken, und gleich bleiben wenn man sie unter eine Bedingung stellt. Einfache Eigenschaften der bedingten W -keit (Satz 4.1.2) Wann sind zwei Ereignisse unabhängig? Die Ereignisse die von einem fixierten Ereignis A unabhängig sind, formen einen Dynkin-system. (Was ist ein Dynkin-system?) Was ist der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit? Was sagt der Satz von Bayes? Beispiel aus der Medizin (Krankheitstest). Beispiel: Ein Ereignis A , das von B und auch von C unabhängig ist aber B und C zusammen bestimmen A . Wie definieren wir, dass Ereignis A von einer Menge von Ereignissen unabhängig ist? Wie kann man das "effektive" überprüfen (Satz 4.3.2)? Was ist das von einem Mengensystem erzeugte Dynkin-system?

Woche 9. Lesen und verstehen: Abschnitt 1.6 (zweite Teil), 4.3, 4.4, 4.5 (ohne Beweis) 4.6

Was ist ein schnitt-stabiles Mengensystem? Das von einem schnitt-stabilen Mengensystem erzeugte Dynkin-System ist ein σ -Algebra. (Ein schnitt-stabiles Dynkin-System ist ein σ -Algebra; Das von einem schnitt-stabilen Mengensystem erzeugte Dynkin-System ist schnitt-stabil) Wann sagt man, dass Ereignissen A_1, \dots, A_n unabhängig sind? Äquivalenz zur Unabhängigkeit jeder Ereignisse von den anderen. Paarweise Unabhängigkeit vs Unabhängigkeit. Beispiel von n Ereignissen die nicht unabhängig sind, aber jede Teilmenge davon, die nicht die ganze Menge ist, ist unabhängig. Was bedeutet es, dass Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind? Wie kann man das nachprüfen (Lemmas 4.4.1, 4.4.6)? Wie kann man die Unabhängigkeit von zwei diskreten Zufallsvariablen einfach nachprüfen? (Satz 4.4.3) Wie ist Unabhängigkeit von X und Y durch die Dichtefunktionen von X , Y , und (X, Y) charakterisierbar? Unabhängigkeit von Zufallsvariablen die von disjunkten Teilmengen einer unabhängigen Menge von Zufallsvariablen bestimmt sind. (Satz 4.4.8, ohne Beweis). Was besagt der Klonsatz? (ohne Beweis)

Woche 10. Lesen und verstehn: Abschnitt 4.6, 5.1 (Binomialveteilung), 5.2

Was weiß man über den Erwartungswert eines Produkts zweier unabhängigen Zufallsvariablen? Was folgt daraus für die Varianz der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen? Was ist das Wurzel- n Gesetz? Was versteht man unter der diskrete Faltung zwei diskrete Zufallsvariablen auf \mathbb{N}_0 ? Wie ist die Faltung zweier Funktionen definiert? Was ist die Dichtefunktion von der Summe zweier unabhängigen Zufallsvariablen mit Dichtefunktion? Welche Problemstellung liegt der Binomialverteilung zugrunde? Wie lautet die Formel für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung? Unter welchen Voraussetzungen kann man die hypergeometrische Verteilung durch eine Binomialverteilung approximieren?

Woche 11. Lesen und verstehen: Abschnitt 5.3 5.4 (ohne Beweis), 6.1, 6.2, 6.3 Approximation der Binomialverteilung durch Poisson Verteilung mit Beispielen, Satz von de Moivre-Laplace als Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes (ohne Beweis). Kontinuierliche Wartezeiten, Charakterisierung als Exponential-Verteilungen (Satz 6.1.3), Beispielen, Summen (ohne Faltung, nur Erwartungswert), Minimum (Satz 6.2.4), Maximum (Satz 6.2.3) samt Erwartungswert, alles mit Beispielen, Wartezeiten diskreter Fall, Charakterisierung als geometrische Verteilungen (Satz 6.3.2), maximum/minimum.

Woche 12. Lesen und verstehen: Abschnitt 7.1, 7.2, 7.3, 8.2, Aigner-Skript (<http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI/Aigner.PDF>)

Was versteht man unter "Konvergenz in Wahrscheinlichkeit"? Erinnerung: punktweise Konvergenz. Beispiel: Folge die in Wahrscheinlichkeit konvergiert, aber an keiner Stelle punktweise. Erinnerung: gleichmäßige Konvergenz. Bemerkung: Daraus folgt Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Eigenschaften der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit (fast sichere Eindeutigkeit des Limes, lineare Kombination). Was versteht man unter "punktweiser fast sicherer Konvergenz"? Konvergenz fast sicher impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Eigenschaften (fast sichere Eindeutigkeit des Limes, lineare Kombination). Konvergenz in Verteilung (definiert durch Verteilungsfunktionen, siehe Skript). Beispiel: Folge die in Verteilung aber nicht in Wahrscheinlichkeit konvergiert, Konvergenz in Verteilung folgt aus Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Markov-Ungleichung, Tschebyschev-Ungleichung, Schwaches Gesetz der großen Zahlen.

Woche 13. Lesen verstehen: Skript (Ergänzung: Buch Abschnitte 8.1, 8.3)

Beispiele für die Tschebyscheff Ungleichung (20 6er in den ersten 20 Versuchen, Reißzwecke werfen); Was versteht man über dem Limes Superior A^∞ einer Ereignisfolge A_1, A_2, \dots ? Wie kann man A^∞ formal mit Vereinigungen und Durchschnitten von der A_i ausdrücken? Was sagen die zwei Borel-Cantelli Lemmas? Beispiel dafür, dass die Unabhängigkeit in Teil (ii) notwendig ist. Anwendungen: Urnbeispiel für 0/1-Gesetz, Affe an der Schreibmaschine, Starkes Gesetz der großen Zahlen, Anwendung: Normale Zahlen,

Woche 14. Lesen und verstehen: Skript, Buch Abschnitte 9.1, 9.2, 9.3 (Ergänzung: Buch Abschnitte 5.4, 8.4),

Zentraler Grenzwertsatz, Bedeutung, Beweis für den Spezialfall der Bernoulli Verteilung (Satz von de Moivre-Laplace), Stirling Formel (ohne Beweis), Beispiel: die Wahrscheinlichkeit dafür schätzen dass die Anzahl der 6er in 1000 Werfen in Intervall $[160, 180]$ liegt. Ziel der Wahrscheinlichkeitstheorie vs der Statistik. Drei verschiedene Merkmale. Stichprobe, Mittelwert und Median einer Stichprobe. Beispiel wenn Median mehr sinnvoll als Mittelwert ist etwas über die Verteilung zu sagen. Charakterisierungssatz für Mittelwert und Median.

Woche 15-16. Lesen und verstehen: Skript (4.2-4.5), (Ergänzung: Buch Abschnitte 10.1-10.5 und 11.1-11.3)