FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
STOCHASTIK 1

WINTER SEMESTER 2013/14
14 OKTOBER 2013

DOZENT: PROF. TIBOR SZABÓ,
TUTOREN: TILMAN MIRSCHEL, OLAF PARCZYK, YIZHENG YUAN

Übungsblatt 0

Überlegen und diskutieren in den Übungsgruppen in der ersten Woche

Aufgabe 1 []

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie drei verschiedene σ-Algebren über Ω an.

Aufgabe 2 []

Es sein $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem auf Ω. Das Mengensystem $\mathcal{E}$ kann dann gewisse Eigenschaften haben. Wir kürzen sie so ab:

- **E1**: $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\Omega \in \mathcal{E}$;
- **E2**: Für beliebige $E \in \mathcal{E}$ gilt es auch $\Omega \setminus E \in \mathcal{E}$;
- **E3**: Für beliebige $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ gilt es auch $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$;
- **E4**: Sei I eine beliebige Menge von Indices. Für beliebige Auswähl $E_\alpha \in \mathcal{E}$ von Mengen für jede $\alpha \in I$, gilt es auch $\cup_{\alpha \in I} E_\alpha \in \mathcal{E}$;
- **E5**: Für beliebige $E, F \in \mathcal{E}$ gilt es auch $E \cup F \in \mathcal{E}$;

(Zur Erinnerung: $\mathcal{E}$ wird eine σ-Algebra genannt, wenn **E1**, **E2** und **E3** erfüllt sind.) Prüfen Sie für die folgenden drei Beispiele nach, welche die Eigenschaften **E1**, ..., **E5** gelten.

a) Ω ist beliebig, und $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$.

b) Ω is beliebige endliche Menge, und $\mathcal{E} = \{E \mid E \subseteq \Omega \text{ und } |E| \text{ ist gerade}\}$

c) $\Omega \neq \emptyset$ ist eine beliebige nichtleere Menge, $x_0 \in \Omega$ ist fixiert, und
$\mathcal{E} := \{E \mid E \subseteq \Omega \text{ und } x_0 \in E\}$

Aufgabe 3 []

Es sei Ω eine Menge, und sei $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Wir fixieren ein $\omega_0 \in \Omega$ und definieren dann Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$ wie folgt:

$$\mathbb{P}(E) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega_0 \in E; \\ 0 & \text{wenn } \omega_0 \notin E. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaßist. (Es wird das *zu* ω_0 *gehörige Punktmaß* genannt.)

Aufgabe 4 []

Sei $\Omega = \{-100.000, \ldots, 100.000\}$. Welches der folgenden Mengensysteme ist eine σ-Algebra auf Ω und warum?

a) Alle Teilmengen, für die die Summe der Elemente Null ergibt (die leere Summe ist als Null definiert).

b) Alle Teilmengen, für die der Schnitt mit der Menge $\{1, 2, \ldots, 12\}$ eine gerade Anzahl von Elementen hat.

c) Das Mengensystem, das aus $\emptyset$ und allen Teilmengen der Form $\{-100.000, \ldots, 0\} \cup E$ mit $E \subseteq \{1, \ldots, 100.000\}$ besteht.