

DOZENT: PROF. TIBOR SZABÓ,  
TUTOREN: TILMAN MIRSCHEL, OLAF PARCZYK, YIZHENG YUAN

## Übungsblatt 1

Abzugeben bis zum 24. Oktober, in der Fächern der Tutoren

**Aufgabe 1** [10 Punkte]  
Sei  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ . Geben Sie alle  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$  an. Beweisen Sie dass es kein mehr gibt.

**Aufgabe 2** [10 Punkte]  
Sei  $\Omega$  beliebig und  $\mathcal{E}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ . Für eine Teilmenge  $C \subseteq \Omega$  definieren wir die *Spur von  $E$  in  $C$*  durch  $\mathcal{E}_C := \{E \cap C \mid E \in \mathcal{E}\}$ . Zeigen Sie, daß

- (i)  $\mathcal{E}_C$  eine  $\sigma$ -Algebra ist (möglicherweise *nicht* auf  $\Omega$ );
- (ii) wenn  $C \in \mathcal{E}$ , dann  $\mathcal{E}_C = \{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq C\}$ .

**Aufgabe 3** [10 Punkte]  
 $\mathbb{P}_1$  und  $\mathbb{P}_2$  seien Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\Omega, \mathcal{E})$ . Wir definieren die Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\mathbb{P}(E) := \min\{\mathbb{P}_1(E), \mathbb{P}_2(E)\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{P}$  **genau dann** ein Wahrscheinlichkeitsmaße ist, wenn  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ .

**Aufgabe 4** [10 Punkte]  
Sei  $\Omega$  eine Menge mit  $|\Omega| \geq 2$  und sei  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$  die Potenzmenge von  $\Omega$ . Sei zwei verschiedene Elemente  $x_0, y_0 \in \Omega$  fest gewählt. Weiter seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  reelle Zahlen. Definieren wir die Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$  wie folgt:

$$\mathbb{P}(E) := \begin{cases} a & \text{wenn } x_0 \notin E \text{ and } y_0 \notin E \\ b & \text{wenn } x_0 \in E \text{ and } y_0 \notin E \\ c & \text{wenn } x_0 \notin E \text{ and } y_0 \in E \\ d & \text{wenn } x_0 \in E \text{ and } y_0 \in E \end{cases}$$

Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an  $a, b, c, d$  dafür, dass durch  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird.