Übungsblatt 13 - Lösungsvorschlag

Yizheng Yuan

Aufgabe 1
Diese Aufgabe zeigt, dass im 2. Teil des Lemmas von Borel-Cantelli die Bedingung der paarweisen Unabhängigkeit der Ereignisse wichtig ist.

Sei $\Omega = [0,1]$ mit Gleichverteilung und sei $A_n := [0, \frac{1}{n}]$.
Dann ist $\limsup A_n = \{0\}$, da für alle $x > 0 : x \notin [0, \frac{1}{n}]$, sobald $n > \frac{1}{x}$
Damit gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ und $\mathbb{P}(\limsup A_n) = \mathbb{P}(\{0\}) = 0$

Und die Moral von der Geschicht': Checkt die Bedingungen eines Satzes, bevor ihr sie anwendet; das reimt sich nicht!
(Die A_n waren hier nicht paarweise unabhängig, da sie ineinander enthalten waren.)

Aufgabe 2
Sei $A_n := \{X_n \geq n+1\}$.
Gesucht ist also $\mathbb{P}(\limsup A_n)$

Da X_n geometrisch verteilt zu $q \in]0,1[$ ist, gilt
$\mathbb{P}(X_n \geq n+1) = (1-q) \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} q^{k-1} = (1-q)q^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q)q^n \frac{1}{1-q} = q^n$
$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geq n+1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n < \infty$
Nach dem Lemma von Borel-Cantelli (Teil 1) haben wir $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

Aufgabe 3
Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt: $\frac{X_1 + ... + X_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}\sigma(X)} \to N(0,1)$ in Verteilung.
Das heißt für große n ist $\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}\sigma(X)} \in [a,b]\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$
Hier: $\mathbb{E}(X) = 1,\ \sigma(X) = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\mathbb{P}(X_1 + ... + X_{1000} \in [980, 1020]) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_{1000} - 1000}{\sqrt{1000}/\sqrt{3}} \in \left[\frac{-20}{\sqrt{1000}/\sqrt{3}}, \frac{20}{\sqrt{1000}/\sqrt{3}}\right]\right)$
$\approx \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_{1000} - 1000}{\sqrt{1000}/\sqrt{3}} \in [-1.0954, 1.0954]\right) \approx 72.67\%$

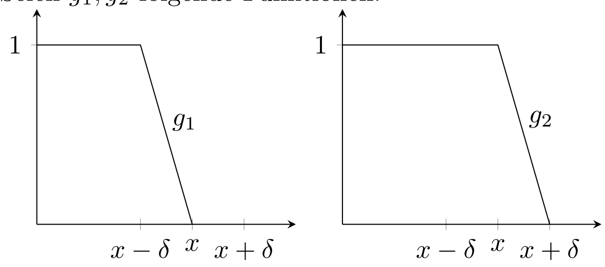
Aufgabe 4
Sei F_X die Verteilungsfunktion von X und sei $x \in \mathbb{R}$ mit F_X stetig in x.
Zeige: $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Da F_X stetig in x ist, gibt es $\delta > 0$ mit

$$|F_X(x) - F_X(x-\delta)| < \varepsilon, \ |F_X(x) - F_X(x+\delta)| < \varepsilon \tag{1}$$

Seien g_1, g_2 folgende Funktionen:



Schreibe im Folgenden $\mathbb{E}_X(g) = \mathbb{E}(g(X))$ (Erwartungswert im von X induzierten Wahrscheinlichkeitsraum)
Beachte, dass $\forall y \in \mathbb{R} : F_X(y) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, y]) = \mathbb{E}_X(\chi_{]-\infty,y]})$.

Wegen Monotonie des Erwartungswerts gilt:
$\mathbb{E}_X(\chi_{]-\infty,x-\delta]}) \leq \mathbb{E}_X(g_1) \leq \mathbb{E}_X(\chi_{]-\infty,x]}) \leq \mathbb{E}_X(g_2) \leq \mathbb{E}_X(\chi_{]-\infty,x+\delta]})$
Mit (1) gilt also

$$|F_X(x) - \mathbb{E}_X(g_1)| < \varepsilon, \ |F_X(x) - \mathbb{E}_X(g_2)| < \varepsilon \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{E}_{X_n}(g_1) \to \mathbb{E}_X(g_1)$ und $\mathbb{E}_{X_n}(g_2) \to \mathbb{E}_X(g_2)$
Damit gilt für große $n : |\mathbb{E}_X(g_1) - \mathbb{E}_{X_n}(g_1)| < \varepsilon$ und $|\mathbb{E}_X(g_2) - \mathbb{E}_{X_n}(g_2)| < \varepsilon$
Zusammen mit (2):

$$|F_X(x) - \mathbb{E}_{X_n}(g_1)| < 2\varepsilon, \ |F_X(x) - \mathbb{E}_{X_n}(g_2)| < 2\varepsilon \tag{3}$$

Wegen Monotonie des Erwartungswerts haben wir $\mathbb{E}_{X_n}(g_1) \leq F_{X_n}(x) \leq \mathbb{E}_{X_n}(g_2)$
und zusammen mit (3) $|F_X(x) - F_{X_n}(x)| < 2\varepsilon$ für große n.