Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1

Winter Semester 2013/14
21 Oktober 2013

Dozent: Prof. Tibor Szabó,
Tutoren: Tilman Mirschel, Olaf Parczyk, Yizheng Yuan

Übungsblatt 2

Abzugeben bis zum 31. Oktober, 12:00, in der Fächern der Tutoren

Aufgabe 1 [10 Punkte]
Sei Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω. Ein Ereignis $A \in \mathcal{E}$ heißt *Atom*, falls für jedes Ereignis $B \in \mathcal{E}$ mit $B \subseteq A$ entweder $B = A$ oder $B = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie:

a) Zwei verschiedene Atome sind disjunkt.

b) Ist Ω höchstens abzählbar, dann ist $\mathcal{D} = \{A : A \text{ ist ein Atom}\}$ eine Partition von Ω (d.h. es existiert zu jedem $\omega \in \Omega$ genau ein Atom $A(\omega)$ mit $\omega \in A(\omega)$) und $\mathcal{E}$ die Menge aller (möglichen) Vereinigungen seiner Atome (formal gesagt, $\mathcal{E} = \{\cup_{E \in \mathcal{D}'} E : \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}\}$).

Aufgabe 2 [10 Punkte]

a) Sei Ω die Menge aller abzählbar unendlichen Folgen von Würfen mit einem Würfel. Definieren wir die Ereignisse $A_k = \{6 \text{ im } k\text{-ten Wurf}\}$. Beschreiben Sie mit Worten das Ereignis $A = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$.

b) Es sei Ω eine Menge, und $\mathcal{E}$ sowie $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots,$ seien σ-Algebren auf Ω. Es gelte $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}$. Dann muss $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ keine σ-Algebra sein.

Aufgabe 3 [10 Punkte]
Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es dann eine Primzahl p, so dass $\mathbb{P}(\{p, p+1, p+2, \ldots\}) < \epsilon$.

Aufgabe 4 [10 Punkte]
Zeigen Sie dass für das Mengensystem $\mathcal{M} = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ gilt: $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{O})$ (wobei $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge aller *offenen Teilmengen* von $\mathbb{R}$ ist).