Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1

Winter Semester 2013/14
18 November 2013

Dozent: Prof. Tibor Szabó,
Tutoren: Tilman Mirschel, Olaf Parczyk, Yizheng Yuan

Übungsblatt 6

Abzugeben bis zum 28 November, 12:00, in der Fächern der Tutoren

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Die Punkte der Kugelfläche $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ seien mit `rot` und `blau` so gefärbt, dass 90% der Kugelfläche `rot` sind und 10% `blau` sind. Beweisen Sie, dass es einen in die Kugelfläche einbeschriebenen Würfel (also mit Diagonale der Länge 2) gibt, der nur `rot`e Ecken hat.
(Eine Bonusfrage: Färben Sie die Kugelfläche mit `rot` und `blau`, so dass es keinen einbeschriebenen Würfel gibt, dessen Ecken alle `rot` sind. Machen Sie den Anteil der `rot`en Punkte so groß wie Sie das können. Wir teilen die Bonuspunkte zwischen den Gewinnern.)

Aufgabe 2 [10 Punkte]

- Berechenen Sie den Erwartungswert der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert der Normalverteilung $N(a, \sigma^2)$.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Es sei $\Omega = [a, b]$, versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen und einem beliebigen W-Maß $\mathbb{P}$. Weiterhin sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass auch die Ableitung X' eine Zufallsvariable ist. (Achtung: X' ist nicht notwendigerweise stetig!)

Aufgabe 4 [10 Punkte]

$\Omega = [1, 27]$ sei mit der Dichte $f(x) = cx$ versehen. Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei durch $X(x) := \sqrt[3]{x}$ definiert. Bestimmen Sie den Wert von c, die Dichte von $\mathbb{P}_X$ und berechnen Sie damit $\mathbb{P}(\{X \in [1, 2]\})$.